L2 PCAV Examen de Mathématiques du 17/12/2012

Durée : 2h00
Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés.
La notation tiendra compte de la rédaction.

Exercice 1.

(1) On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que la droite D d'équation $x + 2y = 2$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

(b) Donner une base de la droite d'équation $x + 2y = 0$.

(2) On considère, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (2, -4, 5)$ et $v_3 = (-1, 8, -13)$.

(a) Montrer que la famille $\{v_1, v_2\}$ est une famille libre. En déduire que le sous espace vectoriel F engendré par $\{v_1, v_2\}$ est de dimension 2 .

(b) Ecrire v_3 comme combinaison linéaire de v_1 et v_2. En déduire que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. On se donne deux réels λ et μ strictement positifs. On considère la variable aléatoire discrète $X : \Omega \to \mathbb{N}$ dont la loi de probabilité est définie par $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ si $k \in \mathbb{N}$.

(1) De quelle loi s'agit-il ? Donner son espérance et sa variance.

(2) On définit une autre loi discrète $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ dont la loi est définie par :

$$P(Y = n) = \begin{cases} 0 & si \quad n = 2k+1 \\ e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!} & si \quad n = 2k \end{cases}.$$

(a) Montrer que $E(Y) = 2\mu$.

(b) Quelle est l'espérance de $X + Y$?

On suppose maintenant que X et Y sont indépendantes.

(c) Calculer $P(X + Y = 0)$, $P(X + Y = 1)$,$P(X + Y = 2)$ et $P(X + Y = 3)$.

(d) En déduire $P(X + Y \geq 4)$.

(e) Montrer que $P(X + Y = 2n) = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{q=0}^{n} \frac{\mu^q}{q!} \frac{\lambda^{2n-2q}}{(2n-2q)!}$.

Exercice 3. Une machine fabrique des pièces cylindriques dont le diamètre exprimé en millimètres, est une variable aléatoire D qui suit une loi normale d' espérance m et de variance $(\sigma)^2$. L'écart-type est fixé à $\sigma = 0,4$ et la moyenne m est réglable. On note U la variable aléatoire centrée réduite associée à D, f la densité de U et F sa fonction de répartition. On donne les valeurs suivantes : $F(1,25) = 0,8944$ et $F(2,5) = 0,9938$. On laissera les résultats des calculs sous forme de fraction ou sous forme décimale.

(1) Rappeler l'expression de la densité f. Ecrivez F en fonction de f.

(2) On suppose que $m = 8$. Calculer $P(D > 9), P(D < 7,5)$ et $P(7,5 < D < 8,5)$.

(3) On vérifie les pièces à l'aide de deux calibres, un de 7,5 mm et un de 8,5 mm. La pièce est acceptée si elle passe dans le grand calibre mais pas dans le petit. Calculer la probabilité qu'elle soit refusée pour chacune des valeurs : $m = 7,5$; $m = 8$ et $m = 8,5$.

(4) Si $m = 8$, calculer la probabilité que la pièce soit acceptée sachant qu'elle passe dans le gros calibre.

(5) Si la pièce est trop petite, elle est rejetée et la perte subie est de 10 euros. Si elle est trop grande, on peut la rectifier pour un coût de 3 euros et on admet que la pièce est acceptée aprés vérification. Le coût est nul si la pièce est bonne. On appelle Z la variable aléatoire qui décrit la perte. Montrer que c'est une variable aléatoire finie prenant trois valeurs. Calculer $E(Z)$ en fonction de F et de m.

(6) On pose $g(m) = E(Z)$. Rappeler pourquoi $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Calculer $g'(m)$ en fonction de F' et m.

(7) Résoudre $g'(m) = 0$: montrer que $m_0 = 8 + (0,16)\ln(\frac{10}{3})$ est la seule solution.

(8) En déduire m telle que $E(Z)$ soit minimale, c'est à dire pour que le réglage de la machine soit optimal.
(Pour information $m_0 \simeq 8,19$.)

L2 PCAV Examen de Mathématiques du 16/12/2013

Durée : 2h00

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés.
Les résultats des calculs seront **simplifiés** et laissés sous forme de fraction et puissance.
Il sera tenu compte de la rédaction.

Exercice 1. On considère, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 3, -1)$, $v_3 = (-1, -6, 5)$ et $v_4 = (0, 0, 1)$.

(1) La famille $\{v_1, v_2\}$ est-elle libre ? Si oui, donner la dimension du sous espace vectoriel F engendré par $\{v_1, v_2\}$ puis identifier F.

(2) Ecrire v_3 comme combinaison linéaire de v_1 et v_2. En déduire que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) La famille $\{v_1, v_2, v_4\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2. Pour un certain type d'ampoules, la durée de vie en heure est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité admet une densité f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ te^{-bt} & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

où b est une constante strictement positive.

(1) Pour $x > 0$ calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^x te^{-bt}\mathrm{d}t$.

(2) Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-bt}dt$ converge et calculer sa valeur.

(3) En déduire la valeur de b pour que f soit une densité de probabilité.

(4) Donner la fonction de répartition de X.

(5) Calculer la probabilité pour qu'une ampoule fonctionne toujours au bout de 1501 heures sachant qu'elle fonctionne toujours au bout de 1001 heures.

(6) On considère un autre type d'ampoules dont la durée de vie en heure suit une variable aléatoire Y de densité g définie par

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Calculer $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$.

(7) On suppose que X et Y sont indépendantes. Quelle est la densité de la somme $X + Y$?

Tournez la page →

Exercice 3. Dans une population, la probabilité qu'une personne demande à être vaccinée contre la grippe est $p = 0,1$. On constitue, dans cette population, un échantillon de n individus et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes de l'échantillon qui demandent à être vaccinées.

(1) Quelle est la loi de X ?

(2) Pour $n = 10$ calculer la probabilité que trois personnes (exactement) demandent à être vaccinées et la probabilité qu' au moins deux demandent à être vaccinées

(3) On suppose maintenant que $n = 10000$.

(a) Donner l'espérance et la variance de X.

(b) Montrer qu'on peut approximer X par une loi normale (qu'on appelle aussi X pour la suite). Donner ses paramètres .
On note U la loi normale de paramètres 0 et 1 et F_U sa fonction de répartition. On donne $F_U(1,96) = 0,975$ et $F_U(0,8416) = 0,8$

(c) Calculer $P(941,2 < X < 1058,8)$

(d) Calculer x tel que $P(X \leq x) = 0,8$

(e) Pour des raisons de conservation limitée des vaccins, le nombre de vaccins disponibles pour servir cet échantillon de 10000 individus est limité à une valeur x_{lim} qui correspond au nombre maximal de personnes qu'on peut vacciner. On appelle R le risque de ne pouvoir répondre à une demande massive de vaccinations. Quel nombre x_{lim} de vaccins faut-il prévoir pour que le risque R soit égal à 1%? (On donne $F_U(2,33) = 0,99$)