Feuille de TD n^{o}5 - Correction

2016-2017.

Exercice 5.

1. Démontrer par récurrence la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Définissons pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Initialisation. On a

$$(a+b)^0 = 1$$

et

$$\sum_{k=0}^{0} C_0^k a^k b^{0-k} = C_0^0 a^0 b^0 = 1$$

donc la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}.$$

Or la formule de Pascal nous dit que $\forall 1 \leq k \leq k$, $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} &= b^{n+1} + a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} \\
&= b^{n+1} + a^{n+1} + b\sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} + a\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^{k-1} b^{n-(k-1)} \\
&= b^{n+1} + a^{n+1} + b\left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} - C_n^0 a^0 b^n\right] + a\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^k b^{n-k} \\
&\overset{(HR)}{=} b^{n+1} + a^{n+1} + b[(a+b)^n - b^n] + a[(a+b)^n - a^n] \\
&= b^{n+1} + a^{n+1} + b(a+b)^n - b^{n+1} + a(a+b)^n - a^{n+1} \\
&= (a+b)(a+b)^n = (a+b)^{n+1}.
\end{aligned}$$

On a bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$

□

2. Calculer $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k, \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k$ et $\sum_{k=0}^{4n} C_{4n}^k i^k$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.
- $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0$.
- $\sum_{k=0}^{4n} C_{4n}^k i^k = \sum_{k=0}^{4n} C_{4n}^k i^k 1^{4n-k} = (1+i)^{4n} = \left((1+i)^4\right)^n$.
  Or $(1+i)^4 = (1+2i-1)^2 = (2i)^2 = -4$. Donc

$$\sum_{k=0}^{4n} C_{4n}^k i^k = (-4)^n.$$

$\square$

3. Calculer $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n := \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx)$ et $T_n := \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in \mathbb{R}$. Pour plus de commodité on se restreint à $x \in]-\pi;\pi]$ (*exercice : faire le cas général*). On sait que pour tout $k \leq n$, $\cos(kx) + i\sin(kx) = e^{ikx}$. Donc

$$\begin{aligned} S_n + iT_n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx) + i\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx) \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\cos(kx) + i\sin(kx)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ikx} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{ix})^k 1^{n-k} = (e^{ix}+1)^n. \end{aligned}$$

Calculons $e^{ix}+1$: cherchons sa forme exponentielle.

$$\begin{aligned} |e^{ix}+1| &= |(1+\cos(x)) + i\sin(x)| \\ &= \sqrt{(1+\cos(x))^2 + (\sin(x))^2} \\ &= \sqrt{1+2\cos(x) + (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2} \\ &= \sqrt{2(\cos x + 1)} \\ &= \sqrt{4(\cos\tfrac{x}{2})^2} \; car \cos(y)^2 = \tfrac{\cos(2y)+1}{2} \\ &= 2\cos(\tfrac{x}{2}) \; car \cos(\tfrac{x}{2}) \geq 0 \; si \; x \in]-\pi;\pi]. \end{aligned}$$

On a alors

$$e^{ix}+1 = 1+\cos x + i\sin x = 2\cos(\frac{x}{2})\left(\frac{1+\cos x}{2\cos(\frac{x}{2})} + i\frac{\sin x}{2\cos(\frac{x}{2})}\right).$$

Or

$$\frac{1+\cos x}{2\cos(\frac{x}{2})} = \frac{2(\cos\frac{x}{2})^2}{2\cos\frac{x}{2}} = \cos(\frac{x}{2})$$

et $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ d'où

$$\frac{\sin x}{2\cos(\frac{x}{2})} = \sin(\frac{x}{2}).$$

On en déduit donc

$$e^{ix}+1 = 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right) = 2\cos(\frac{x}{2})e^{i\frac{x}{2}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} S_n + iT_n &= (e^{ix}+1)^n \\ &= \left(2\cos(\tfrac{x}{2})e^{i\frac{x}{2}}\right)^n \\ &= 2^n(\cos\tfrac{x}{2})^n e^{in\frac{x}{2}} \\ &= 2^n(\cos\tfrac{x}{2})^n(\cos(\tfrac{nx}{2}) + i\sin(\tfrac{nx}{2})). \end{aligned}$$

Alors

$$S_n = \mathcal{R}e\left((e^{ix}+1)^n\right) = 2^n(\cos\frac{x}{2})^n\cos\frac{nx}{2}$$

et

$$T_n = \mathcal{I}m\left((e^{ix}+1)^n\right) = 2^n(\cos\frac{x}{2})^n\sin\frac{nx}{2}.$$

$\square$

Exercice 6.
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $A \subset E$ tel que $\mathrm{Card}(A) = p$ avec $3 \leq p \leq n$.

1. Combien y a-t-il de parties de E qui ne contiennent aucun élément de A ?

Démonstration. Les parties de E qui ne contiennent aucun élément de A sont les parties de $C_E A$. En effet si $X \subset E$ et $X \cap A = \emptyset$ alors $X \subset C_E A$ et si $X \subset C_E A$ alors $X \subset E$ et $X \cap A = \emptyset$.
On a $\mathrm{Card}(C_E A) = n-p$ donc $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(C_E A)) = 2^{n-p}$. Il y a donc 2^{n-p} parties de E ne contenant aucun élément de A. $\square$

2. Combien y a-t-il de parties de E qui contiennent exactement trois éléments de A ?

Démonstration. Fixons tout d'abord trois éléments a_1, a_2, a_3 de A. Il y a alors 2^{n-p} parties de E contenant ces trois éléments et aucun autre de A : ce sont les $B \cup \{a_1, a_2, a_3\}$ où $B \in \mathcal{P}(C_E A)$.
De plus il y a C_p^3 manières de choisir 3 éléments de A.
Il y a donc $C_p^3.2^{n-p}$ parties de E contenant exactement trois éléments de A. □

Exercice 7. Soient n, p et k des entiers naturels tels que $n \geq 2$. Soient E un ensemble fini de cardinal n, A et B deux sous-ensembles de E. On note $\mathrm{Card}(A) = p$ et $\mathrm{Card}(B) = k$. On considère l'application

$$g: \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

1. Calculer $g(E)$ et $g(A \cup B)$.

   Démonstration. • $g(E) = (E \cap A, E, \cap B) = (A, B)$.
   • $g(A \cup B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B) = (A, B)$.

   □

2. Montrer que : g est injective $\Leftrightarrow E = A \cup B$.

   Démonstration. • $\Rightarrow$: supposons g injective. On a $g(A \cup B) = g(E) = (A, B)$ (question 1.) et g injective donc $A \cup B = E$.
   • $\Leftarrow$: Supposons $A \cup B = E$.
   Soient $X, Y \subset E$, supposons $g(X) = g(Y)$. On a donc $(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$ donc en particulier

   $$(X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$$

   ce qui équivaut à

   $$X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B).$$

   Comme $E = A \cup B$ et donc $X, Y \subset A \cup B$ on a

   $$\begin{cases} X \cap (A \cup B) = X \\ Y \cap (A \cup B) = Y \end{cases}$$

   d'où $X = Y$.
   g est donc bien injective.

   □

3. On suppose $A \cap B \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in A \cap B$. Déterminer $g^{-1}\big(\{(\{x_0\}, \emptyset)\}\big)$. L'application g est-elle surjective ?

   Démonstration.

   $$\begin{array}{rcl} g^{-1}\big(\{(\{x_0\}, \emptyset)\}\big) & = & \{X \subset E | g(X) = (\{x_0\}, \emptyset)\} \\ & = & \{X \subset E | X \cap A = \{x_0\}, X \cap B = \emptyset\}. \end{array}$$

   Or si $X \subset E$ est tel que $X \cap A = \{x_0\}$, on a en particulier $x_0 \in X$, et comme $x_0 \in B$ on a $x_0 \in X \cap B$ et donc $X \cap B \neq \emptyset$. Donc

   $$g^{-1}\big(\{(\{x_0\}, \emptyset)\}\big) = \emptyset.$$

   Comme il existe un élément de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ qui n'a pas d'antécédent par g, g n'est pas surjective. □

4. On suppose que (A, B) est une partition de E.

   (a) Comparer $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E))$ et $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B))$.

   Démonstration. On a $\mathrm{Card}(E) = n$ donc $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$. De plus

   $$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)) = \big(\mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))\big).\big(\mathrm{Card}(\mathcal{P}(B))\big) = 2^p.2^k = 2^{p+k}.$$

   Comme (A, B) est une partition de E on a $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$ d'où $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$ et donc $p + k = n$. On en déduit donc

   $$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)).$$

   □

   (b) Déduire des questions précédentes que g est bijective.

Démonstration. (A, B) est une partition de E donc $E = A \cup B$; g est donc injective selon la question 2. Comme g est une fonction injective entre deux ensembles *finis* de même cardinal, elle est bijective. $\square$

(c) Déterminer l'application réciproque de g.

Démonstration. Posons

$$h : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (Y_1, Y_2) & \longmapsto & Y_1 \cup Y_2. \end{array}$$

Soit $E \subset E$, on a

$$h \circ g(X) = h(X \cap A, C \cap B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = X \cap (A \cup B) = X.$$

Soient $Y_1 \subset A, Y_2 \subset B$. On a

$$g \circ h(Y_1, Y_2) = g(Y_1 \cup Y_2) = \big((Y_1 \cup Y_2) \cap A, (Y_1 \cup Y_2) \cap B\big).$$

De plus $(Y_1 \cup Y_2) \cap A = Y_1$ car $Y_1 \subset A$ et $Y_2 \cap A = \emptyset$ et $(Y_1 \cup Y_2) \cap B = Y_2$ car $Y_2 \subset B$ et $Y_1 \cap B = \emptyset$. Donc $g \circ h(Y_1, Y_2) = (Y_1, Y_2)$.
On en conclue que $h = g^{-1}$. $\square$