Corrections séance 20 octobre 2014

Augeri Fanny

Feuille 3

Exercice 16 :
1. On a par hypothèse $\mathbb{E}(T) = \lambda$. Or T suit une loi exponentielle. Notons μ son paramètre. On sait que
$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\mu},$$
d'où $\mu = \frac{1}{\lambda}$. On sait que
$$\text{Var}(t) = \frac{1}{\mu^2}.$$
Donc $\text{Var}(T) = \lambda^2$.

2. Soit $T_{g_1}, ..., T_{g_n}$ les temps de germinations respectifs des graines $g_1, ..., g_n$. Par hypothèse $T_{g_1}, ..., T_{g_n}$ sont indépendants et de même loi que T.
(a). Soit $H \subset \mathcal{P}_k^n$, où $\mathcal{P}_k^n$ dénote l'ensemble des parties à k éléments de $G = \{g_1, ..., g_n\}$. On a
$$\mathbb{P}(E_H) = \mathbb{P}(\forall g \in H, T_g \leq t_0, \forall g \notin H, T_{g_i} > t_0).$$
Par indépendance on obtient
$$\mathbb{P}(E_H) = \prod_{g \in H} \mathbb{P}(T_g \leq t_0) \prod_{g \notin H} \mathbb{P}(T_g > t_0).$$
Mais $T_{g_1}, ..., T_{g_n}$ ont même loi que T. D'où
$$\mathbb{P}(E_H) = \mathbb{P}(T \leq t_0)^k \, \mathbb{P}(T > t_0)^{n-k}.$$
Or
$$\mathbb{P}(T > t_0) = e^{-t_0/\lambda},$$
et
$$\mathbb{P}(T \leq t_0) = 1 - \mathbb{P}(T > t_0).$$
On a enfin
$$\mathbb{P}(E_H) = p^{n-k}(1-p)^k.$$

(b). On a
$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{H \in \mathcal{P}_k^n} E_H\right).$$

Or les événements $(E_H)_H$ sont 2 à 2 disjoints. D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N=k) &= \sum_{H\in\mathcal{P}_k^n} \mathbb{P}(E_H) \\ &= \sum_{H\in\mathcal{P}_k^n} p^k(1-p)^{n-k} \text{ d'après (a).} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

on en déduit que N suit une loi binomiale de paramètre $(n, 1-p)$.

Feuille 4

Exercice 2 :
1.

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \left(\int_1^2 xye^{-x-y}dy\right)dx \text{ (par le théorème de Fubini)} \\ &= \int_0^1 xe^{-x}\left(\int_1^2 ye^{-y}dy\right)dx \\ &= \left(\int_0^1 xe^{-x}dx\right)\left(\int_1^2 ye^{-y}dy\right).\end{aligned}$$

Calculons pour $0 \leq a < b$

$$\int_a^b xe^{-x}dx.$$

Par IPP on a

$$\begin{aligned}\int_a^b xe^{-x}dx &= \left[-xe^{-x}\right]_a^b + \int_a^b e^{-x}dx \\ &= ae^{-a} - be^{-b} + \left[-e^{-x}\right]_a^b \\ &= ae^{-a} - be^{-b} + e^{-a} - e^{-b} \\ &= e^{-a}(a+1) - e^{-b}(b+1).\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy = \left(1-2e^{-1}\right)\left(2e^{-1}-3e^{-2}\right) = 6e^{-3} - 7e^{-2} + 2e^{-1}.$$

2. On a

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-3,1], 2x-1 \leq y \leq 2-x^2\right\}.$$

D'après le théorème de Fubini on a

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int_{-3}^1 \left(\int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)\,dy\right)dx.$$

En effectuant le changement de variable $z = x - y$ on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x,y)dxdy &= \int_{-3}^{1} \left(\int_{x^2+x-2}^{1-x} ydy \right) dx \\
&= \int_{-3}^{1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2+x+2}^{1-x} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-3}^{1} \left((1-x)^2 - \left(x^2+x-2\right)^2 \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-3}^{1} \left(\left(x^2-2x+1\right) - \left(x^4+2x^3+3x^2-4x+4\right) \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-3}^{1} \left(-x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 3x \right]_{-3}^{1} \\
&= \frac{1}{60} \left[-12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 30x^2 - 90x \right]_{-3}^{1} \\
&= \frac{-3448}{60} (?) \text{ (calculatrice)}
\end{aligned}$$

3. On a

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,8], y \le x, xy \le 16 \right\}.$$

D'après le théorème de Fubini

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int_0^8 \left(\int_0^{\min(x,16/x)} x^2 dy \right) dx.$$

Comme le dessin nous le suggére, on découpe en 2 l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x,y)dxdy &= \int_0^4 \left(\int_0^x x^2 dy \right) dx + \int_4^8 \left(\int_0^{16/x} x^2 dy \right) dx \\
&= \int_0^4 x^3 dx + \int_4^8 16x dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^4 + [8x^2]_4^8 \\
&= 64 + 8\,(64 - 16) \\
&= 64 + 8.48 = 64 + 384 = 448
\end{aligned}$$

4. On a

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,3], 0 \le y \le x/3 \right\}.$$

D'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,y)dxdy &= \int_0^3 \left(\int_0^{x/3} e^{x^2} dy\right) dx \\ &= \int_0^3 \frac{x}{3} e^{x^2} dx \\ &= [\frac{1}{6} e^{x^2}]_0^3 \\ &= \frac{1}{6}\left(e^9 - 1\right).\end{aligned}$$

Exercice 6:

1. Par hypothèse f est de la forme

$$f = x\mathbb{1}_D,$$

avec $c > 0$. Comme f est une densité de probabilité on a

$$\int_D f(x,y)dxdy = 1.$$

D'où

$$\frac{1}{c} = \int_D dxdy.$$

On a

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1], x^2 \leq y \leq 1\right\}.$$

Or d'après le théorème de Fubini

$$\int_D dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 dy\right) dx.$$

D'où

$$\int_D dxdy = \int_{-1}^1 (1-x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

D'où $c = \frac{3}{4}$.

2. Les densités marginales de X et Y, que l'on note f_X et f_Y respectivement sont

$$f_X(x) = \int f(x,y)dy,$$

$$f_Y(y) = \int f(x,y)dx.$$

On a

$$D_x = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in D\} = \left\{y \in \mathbb{R} : x^2 \leq y \leq 1\right\}.$$

$$D_y = \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in D\} = \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

D'où

$$f_X(x) = \int \mathbb{1}_{(x,y)\in D} dy = \int_{D_x} dy = \int_{x^2}^1 dy = (1-x^2).$$

$$f_Y(y) = \int_{D_y} dx = 2\sqrt{y}.$$

On a $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 9 :

1. D'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives on a

$$\begin{aligned} I_R &= \int_{-R}^{R} \left(\int_{-R}^{R} e^{-(x^2+y^2)} dx \right) dy \\ &= \int_{-R}^{R} e^{-y^2} \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \right) dy \\ &= \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Or $x \mapsto e^{-x^2}$ est une fonction paire. Donc

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx = 2 \int_{0}^{R} e^{-x^2} dx.$$

D'où

$$I_R = 4 \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

2. Notons C_R et $C_{\sqrt{2}R}$ les disques de centre O et de rayon R et $\sqrt{2}R$ respectivement.

Si $(x,y) \in C_R$ alors on a

$$\max(|x|,|y|) \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R^2.$$

Donc $(x,y) \in D_R$.

Soit maintenant $(x,y) \in D_R$. Alors

$$x^2 + y^2 \leq 2R^2.$$

Donc $(x,y) \in C_{\sqrt{2}R}$.

3. D'après 2). on a

$$\mathbb{1}_{(x,y)\in C_R} e^{-x^2-y^2} \leq \mathbb{1}_{(x,y)\in D_R} e^{-x^2-y^2} \leq \mathbb{1}_{(x,y)\in C_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2},$$

où $\mathbb{1}_{(x,y)\in X}$ est définie par

$$\mathbb{1}_{(x,y)\in X} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par croissance de l'intégrale on a

$$J_R \leq I_R \leq J_{\sqrt{2}R}.$$

4. En effectuant le changement de variable suivant

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ \theta \in [-\pi, \pi). \end{cases}$$

on obtient

$$J_R = \int_{[0,R]\times[-\pi,\pi)} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta.$$

D'après le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}J_R &= \int_0^R \left(\int_{-\pi}^{\pi} \rho e^{-\rho^2} d\theta\right) d\rho \\ &= \int_0^R 2\pi\rho e^{-\rho^2} d\rho \\ &= 2\pi(1-e^{-R^2}).\end{aligned}$$

3. Puisque

$$J_R = 2\pi(1-e^{-R^2}),$$

on a

$$\lim_{R\to+\infty} J_R = 2\pi.$$

6. D'après 2).

$$J_R \leq I_R \leq J_{\sqrt{2}R}.$$

Or d'après 3).

$$\lim_{R\to+\infty} J_R = \lim_{R\to+\infty} J_{\sqrt{2}R} = 2\pi.$$

Donc d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{R\to+\infty} I_R = 2\pi < +\infty.$$

Donc

$$\lim_{R\to+\infty} 4\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 = 2\pi.$$

Donc

$$\lim_{R\to+\infty} \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Par continuité de l'application $x \mapsto \sqrt{x}$, on obtient

$$0 \leq \lim_{r\to+\infty} \int_0^R e^{-x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} < +\infty.$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

D'autre part pour tout $R > 0$ on a par parité

$$\int_{-R}^R e^{-x^2}dx = 2\int_0^R e^{-x^2}dx.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^R e^{-x^2}dx \\ &= 2\lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-x^2}dx \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{2\pi}.\end{aligned}$$