Remise à niveau : étude de fonction

Kevin Tanguy

7 Novembre 2017, Angers

Voici quelques rappels permettant d'étudier les variations de certaines fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nous nous focaliserons sur les fractions rationnelles et, si le temps le permet, nous aborderons la fonction exponentielle et le logarithme népérien.

1 Domaine de définition

Une des premières questions que l'on doit se poser lorsque l'on étudie une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. est de déterminer l'ensemble de définition : pour quels réels x l'opération $f(x)$ a du sens ? Pour cela, il convient de déterminer les réels aboutissant à une opération illicite afin de les exclure. Par exemple : on ne peut diviser par zéro, il n'est pas non plus possible de calculer la racine carré d'un nombre négatif,...

Exemple 1.1. Considérons la fonction suivante :

$$x \mapsto \frac{1}{x-1}$$

Il est alors évident que le dénominateur s'annule lorsque $x = 1$. Hormis cette valeur, tous les autres calculs sont possibles. Le domaine de définition de la fonction est alors $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Si maintenant la fonction est peu plus complexe :

$$x \mapsto \frac{1}{x^2+3x-1}$$

Il convient alors de déterminer les racines du polynômes $P(x) = x^2 + 3x - 1$ afin de les exclure.

Si jamais on considérais la fonction suivante :

$$x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^2+3x-1}}$$

Il faudrait établir un tableau de signe pour le polynôme P afin d'exclure les nombres réels tels que $P(x) \leq 0$.

2 Dérivabilité et variations

Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'il était assez aisé de déterminer la monotonie d'une suite en étudiant le signe de la différence de terme consécutifs. C'est à dire le signe de $u_{n+1} - u_n$. Lorsque l'on souhaite étudier une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cela devient plus complexe car nous ne sommes plus limités aux entiers naturels (au lieu d'avoir $n \in \mathbb{N}$ nous avons $x \in \mathbb{R}$).

Débutons par un exemple instructif et considérons la fonction

$$f(x) = 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Il est assez simple de tracer son graphe et de constater, visuellement, que la fonction semble croissante (au sens qui suit).

Définition 2.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est croissante si, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Autrement dit, la fonction f préserve l'ordre entre x et y.

Remarque. On dira que f est décroissante, si elle renverse l'ordre entre x et y :

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

On est à présent en droit de s'interroger : pourquoi la fonction $f(x) -= 2x+1$ est-elle croissante ? Un court moment de réflexion permet de répondre à cette question : ceci est provient du fait que le coefficient directeur (qui vaut 2 dans notre exemple) est positif. Si jamais l'on substituait ce coefficient 2 par -2 nous aurions obtenu une fonction décroissante et si ce coefficient directeur était nul la fonction f serait constante (égale à 1).

Ce que nous venons d'observer peut être résumé comme suit : pour une fonction $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, la monotonie de la fonction est déterminée par le signe du coefficient directeur a. Ceci est intéressant mais un peu restrictif : comment faire si l'on souhaite étudier des fonctions plus complexes que les fonctions affines ?

Compliquons légèrement et étudions la fonction $x \mapsto x^2$. Il est également facile de tracer son graphe et d'observer le fait suivant : la fonction semble décroitre lorsque x est négatif et la fonction semble être croissante lorsque x est positif avec un minimum en 0. On souhaiterai trouver un critère simple, comme le cas des fonctions affines, permettant de prouver l'observation précédente sur la monotonie. Le problème est que l'on ne dispose plus de droite et parler de coefficient directeur n'a plus de sens.

En revanche, il est possible de tracer des tangentes le long de la courbe induite par la fonction $x \mapsto x^2$. Bien que l'on ne connaise ni le coefficient directeur, ni l'ordonnée à l'origine, il semblerait que toutes les tangentes ont un coefficient directeur négatif lorsque $x \geq 0$ tandis qu'elles semblent avoir un coefficient directeur positif lorsque l'on se place parmi les $x \leq 0$.

Il se trouve que cette remarque est cruciale est permet de traiter des cas beaucoup plus complexe : *le coefficient directeur des précédentes tangentes s'appelle le nombre dérivé et son signe permet* *de déterminer la monotonie de la fonction.* De manière un peu plus abstraite, voici ce que nous venons d'observer : à partir d'une fonction f donnée, on a (implicitement) déterminé une nouvelle fonction et le signe de celle-ci me permet de savoir si ma fonction est croissante ou décroissante (via le coefficient directeur des tangentes). Cette nouvelle fonction porte un nom : il s'agit de la dérivée de la fonction f. Cette fonction correspond à un (petit) taux d'accroissement entre deux points et l'étude de son signe permet de connaitre les variations d'une fonction donnée. Dans ce qui suit il est donc primordial de maîtriser la notion de tableau de signe.

Définition 2.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lorsque la limite suivante existe*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = l < \infty$$

on dira que la fonction est dérivable au point x et on notera cette limite par $f'(x)$.

Malheureusement, cette définition n'est pas très manipulable en pratique et il sera plus commode d'utiliser un formulaire dans lequel les dérivées des fonctions usuelles ont déjà été calculées. En voici quelques unes.

Proposition 1.

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $(x^n)' = anx^{n-1}$ pour $x \in \mathbb{R}$.*
2. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}_*$
3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *pour* $x > 0$.
4. $\big(\cos(x)\big)' = -\sin(x)$ *et* $\big(\sin(x)\big)' = \cos(x)$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.
5. $\big(\exp(x)\big)' = \exp(x), \quad x \in \mathbb{R}$ *et* $\big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$

A ceci s'ajoute plusieurs règles de dérivations : si je connais la dérivée de f et la dérivée de g, puis-je en déduire la dérivée de $f+g$? de fg ? de $\frac{f}{g}$ (lorsque g ne s'annule pas) ? Ces règles de dérivations sont essentielles et sont résumées dans la proposition qui suit.

Proposition 2. *Soient f, g deux fonctions dérivables et $a \in \mathbb{R}$.*

1. $\big(af\big)' = af'$.
2. $\big(f+g\big)' = f' + g'$.
3. $\big(fg\big)' = f'g + fg'$.
4. *Si g ne s'annule pas,*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

A partir de ces règles, il sera possible de dériver toutes les fonctions que nous rencontrerons durant le cours. L'étude du signe de ces dérivées permettront ensuite de déterminer les variations de la fonction initiale.

Théorème 3. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable.*

1. *Si* $f'(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ *alors* $x \mapsto f(x)$ *est une fonction croissante.*

2. *Si* $f'(x) \leq 0$, $x \in \mathbb{R}$ *alors* $x \mapsto f(x)$ *est une fonction décroissante.*

3. *Si* $f'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ *alors* $x \mapsto f(x)$ *est une fonction constante.*

4. *S'il existe un réel* x_0 *tel que* $f'(x_0) = 0$ *et que la dérivée change de signe autour de* x_0 *(par exemple* $f'(x) > 0$ *si* $x > x_0$ *et* $f'(x) < 0$ *si* $x < x_0$ *alors* $f(x_0)$ *est un extremum (local) de* f*.*

Remarque. On définit similairement la notion de fonction strictement croissante ou strictement décroissante si l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes dans les points 1 et 2 de la proposition précédente.

Par soucis de complétude, nous énonçons ci-dessous la formule permettant de déterminer (lorsque cela existe) l'équation de la tangente à une courbe.

Proposition 4. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$*. L'équation de la tangente à la courbe* $\mathcal{C}_f$ *au point d'abscisse* x_0 *est alors donnée par*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Remarque. En pratique, l'énoncé de l'exercice fournit la valeur de x_0 et il ne reste plus qu'à déterminer $f'(x_0)$ et $f(x_0)$. A priori, l'équation obtenue doit avoir la forme suivante :

$$y = ax + b$$

avec $a = f'(x_0)$ et $b = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$.

3 Limites

Cette courte section a pour objet de rappeler certaines faits concernant la limite de fonction. Supposons que l'on souhaite étudier la fonction suivante :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

Les sections précédents permettent de comprendre les variations de cette fonction au travers du signe de la dérivée. Mais que se produit-il lorsque x tend vers $\pm\infty$? Similairement, que peut-on dire de la fonction

$$g(x) = \frac{1}{x-1}$$

lorsque $x \to \pm\infty$ ou $x \to 1^+$ ou $x \to 1^-$?

Sans être exhaustif, nous renvoyons le lecteur vers ses cours du lycée pour plus de détails, voici quelques rappels permettant de répondre aux questions précédentes.

Proposition 5. *Soit $n \in \mathbb{N}$, alors*

1. $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

2. $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ *si n est impair et* $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ *si n est pair.*

3. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

4. $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$.

5. $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ *si n est impair et* $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ *si n est pair.*

Remarque. Bien entendu, les fonctions que nous risquons de rencontrer seront éventuellement plus complexes. Auquel cas, il faudra se rappeler des différentes opérations licites sur les limites : limite d'une somme, limite d'un produit, limite d'un quotient. Il faudra également être prudent vis-à-vis des formes indéterminées : $0 \times \infty$, $+\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ pour lesquelles un travail supplémentaire est nécessaire. Par exemple, considérons la fonction $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$. Lorsque $x \to +\infty$ nous avons

$$x^3 \to +\infty, \qquad -2x^2 \to +\infty, \qquad 3x \to +\infty, \qquad \text{et} \quad -1 \to -1$$

Formellement, nous avons donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty + \infty - 1$ et nous ne pouvons conclure (à cause de la forme indéterminée). Cependant, nous avons tout de même l'intuition que le terme en x^3 va être plus important que les autres. Pour lever cette indetermination on procède donc en factorisant par le terme dominant (ici x^3) comme suit :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = x^3\left[1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right]$$

Observons alors qu'il est aisé de déterminer la limite du terme entre crochet. En effet,

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^3} = 0.$$

Autrement dit, le terme entre crochet converge vers le réel 1. Ainsi, d'après les règles concernant les opérations sur les limites, nous obtenons que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \times \lim_{x\to+\infty}\left[1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right] = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

ce qui confirme notre intuition. On pourrait également procéder de manière similaire (en factorisant numérateur et dénominateur par le terme dominant) lorsque l'on étudiera des fractions rationnelles. Par exemple,

$$\frac{x^2+x-1}{x-1} = \frac{x^2\left[1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right]}{x\left[1-\frac{1}{x}\right]} = \frac{x\left[1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right]}{1-\frac{1}{x}}.$$

En effet, une telle factorisation permet de lever l'indétermination (en simplifiant les puissances de x en facteurs) qui apparaissait lorsque $x \to +\infty$ et permet de déterminer la limite du quotient.

4 Exercices

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \sqrt{2x-4}, \qquad x \mapsto \frac{6x+1}{2x^2-5x+2}, \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x^2-4x+5}}$$

Exercice 2. Résoudre l'inégalité suivante à l'aide d'un tableau de signe :

$$-4x^2+4x-1 \geq 0$$

Exercice 3. A l'aide de la définition, calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto x^2$.

Exercice 4. A l'aide du formulaire et des règles de dérivations, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 + 5x$.
2. $g(x) = 2x + \frac{1}{x}$.
3. $h(x) = x^3 + 3x + 1$.
4. $\phi(x) = 1 - 3x + \sqrt{x}$.
5. $\psi(x) = \frac{3-2x}{5}$.

Exercice 5. A l'aide du formulaire et des règles de dérivations, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3\sqrt{x}$.
2. $g(x) = (2x^2-1)(4x^3+1)$.

3. $h(x) = x^2\sqrt{x}$.

4. $\phi(x) = (2x+1) \times \frac{1}{x}$.

Exercice 6. A l'aide du formulaire et des règles de dérivations, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{2x+1}$.

2. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

3. $h(x) = \frac{-3x+5}{x^2+1}$.

4. $\phi(x) = \frac{x^2+x-1}{x^3+x+1}$.

Déterminer les limites des fonctions précédentes lorsque $x \to \pm\infty$.

Exercice 7. Soit $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

1. Justifier que f admet un minimum. Pour cela, on utilisera la forme canonique.

2. Calculer f', étudier son signe et retrouver le résultat de la question 1.

Exercice 8. Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, 4]$.

Exercice 9. Soit $f(x) = \frac{5+x}{1+x}$. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, 9]$.

Exercice 10. Etudier les variations de la fonction ci-dessous sur $\mathbb{R}$ et déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$.

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2+4x+5}$$

5 Exercices supplémentaires

Voici une série d'exercice, de niveau 1ère S/Terminale S, permettant à l'étudiant de s'entrainer et de mieux appréhender ces notions. Il est primordial de **chercher** sérieusement ces exercices, afin que la solution soit utile au niveau de la compréhension. La meilleure façon d'apprendre est de se tromper, pour comprendre son erreur et ne plus la reproduire.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + \pi \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer le domaine de définition et de continuité de f.

2. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

3. Justifier que f est dérivable, calculer f' et étudier son signe.

4. En déduire les variations de la fonction f.

5. Donner l'équation de la tangente à la courbe C_f en 0.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2+1}{6-3x}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction f admet-elle des minimum ou maximum (locaux) sur $\mathbb{R}$? Si oui, lesquels ? Sont-ils globaux ?

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

Soit g la fonction définie par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - x$ est strictement positif.

3. Calculer les limites de la fonctions f en $\pm\infty$.

4. Après avoir justifier son existence, calculer f'.

5. Dresser le tableau de variation de f.

6. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

7. A l'aide des questions 1 et 2, étudier la position de la courbe C_f par rapport à T. *Indication : on pourra étudier le signe de $f(x) - y(x)$ avec $y(x)$ désignant l'équation de la tangente T.*

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x})$$

1. Etudier la limite de f en $+\infty$.

2. Calculer f' et montrer que $f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.

3. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.

4. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.