Révisions probabilités : un peu de réflexion

Les questions suivantes ne seront pas traitées en TD, il s'agit simplement de pistes de réflexion pour mieux assimiler certains théorèmes important du cours. Les points abordés sont en rapport avec les exercices de la feuille de TD de probabilités.

0.1 Partie théorique

Dans la suite les lettres $X, Y, Z, T \ldots$ désigneront des variables aléatoires $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$.

1. Pouvez vous donner un exemple concret pour expliquer la différence entre A_n^k et C_n^k ?

2. Connaissez-vous la formule pour calculer, $\mathbb{E}[X]$, l'espérance d'une variable aléatoire X ?

3. Connaissez vous une formule reliant la $\mathrm{Var}(X)$ et ses moments d'ordre un et deux ?

4. Soient A et B deux évenements quelle est la formule pour la probabilité de A sachant B ?

5. Soient A un évenement et B_1, B_2, B_3 une partition de Ω, démontrer la formule des probabilités totales pour ce cas particulier.

6. Pour une partition de Ω en trois évènements B_1, B_2, B_3 et en utilisant la formule de probabilités totales, redémontrer la formule de Bayes pour n'importe quel évènement $A \in \mathcal{A}$.
$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_j \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}, \quad \forall i = 1, 2, 3$$

7. Que doit-on faire pour determiner la loi d'une variable aléatoire X ?

8. A quelle condition deux évènements A et B sont-ils indépendants ? Comment peut-on montrer que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?

9. Si X et Y sont des variables aléatoires **indépendantes** et si l'on pose $Z = X + Y$, quelle est la formule pour déterminer la loi de Z ?

10. Si l'on connait la loi d'un couple aléatoire (X, Y) comment déterminer les lois marginales de X et Y ?

0.2 Quelques lois usuelles

En cours vous avez principalement vu la loi uniforme sur un ensemble fini : par exemple si X désigne le résultat d'un dés équilibré à 6 faces nous savons que $X \sim U_n\big(\{1, \ldots, 6\}\big)$ et
$$\forall A \in \mathcal{P}\big(\{1, \ldots, 6\}\big), \quad \mathbb{P}(X \in A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\{1, \ldots, 6\})}.$$

Nous avons également abordé en TD d'autres lois de probabilités. Il convient alors de connaitre leur lois ainsi que quelques propriétés remarquables.

Soient $p \in [0, 1]$, $\lambda, \mu > 0$ et $m, n, k \in \mathbb{N}$

1. Si $X \sim B_e(p)$, que vaut $\mathbb{P}(X = k) = ?$ pour quels valeurs de k ? Que vaut $\mathbb{E}[X]$? $\mathrm{Var}(X)$? Si $X \sim B_e(p)$ et $Y \sim B_e(p)$ quelle loi suit $Z = X + Y$?

2. Comment justifier rigoureusement qu'une variable aléatoire X suit une loi Binomiale de paramètres (n, p) ?Que vaut $\mathbb{P}(X = k) = ?$ pour quels valeurs de k ? Que vaut $\mathbb{E}[X]$? $\mathrm{Var}(X)$? Si $X \sim B(n, p)$ et $Y \sim B(m, p)$ sont indépendantes, quelle loi suit $Z = X + Y$?

3. Soit $X \sim P_o(\lambda)$. Que vaut $\mathbb{P}(X = k) = ?$ pour quels valeurs de k ? Que vaut $\mathbb{E}[X]$? $\mathrm{Var}(X)$? Si $X \sim P_o(\lambda)$ et $Y \sim P_o(\mu)$ sont indépendantes, quelle loi suit $Z = X + Y$?

4. Comment justifier rigoureusement qu'une variable aléatoire X suit une loi Géométrique $G_{eo}(p)$? Si $X \sim G_{eo}(p)$. Que vaut $\mathbb{P}(X = k) = ?$ pour quels valeurs de k ? Que vaut $\mathbb{E}[X]$? $\mathrm{Var}(X)$?

5. Pour chacuns des exemples précédents pouvez vous donner un exemple de la vie courante qui peut-être modéliser par ces aléas ?

0.3 Quelques astuces calculatoires

1. Passage au complémentaire pour calculer certains évenements, par exemple : $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$ si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

2. Determiner la loi d'une variable : si X prend comme valeurs $\{0, 1, 2\}$ et que l'on a déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X = 1)$, comment obtenir rapidement $\mathbb{P}(X = 2)$?

3. Soient A et B deux évenements, comment peut-on décomposer l'évenement A en utilisant lévenement B ?
4. Changement de probabilité conditionelle : soient A et B deux évenements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B > 0)$. Comment obtenir $\mathbb{P}(A|B)$ ou $\mathbb{P}(B|A)$ à partir de $\mathbb{P}(A \cap B)$?

5. Ne pas oublier certaines formules essentielles : série géometrique, série exponentielle, formule du binôme de Newton....