Feuille de TD n°3. Espaces vectoriels normés.

Exercice 1. Représenter les boules fermées de centre (0,0) et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$

Exercice 2. Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on définit $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \mid x_i \mid$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^2}$.

1. Montrer que ce sont des normes.
2. Montrer qu'elles sont équivalentes.

Exercice 3. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}$, on définit

$$N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2}.$$

1. Montrer que $(x, y) \mapsto N(x, y)$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. $\star$ En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $N(x, y) \leq \|(x, y)\|_2,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. $\star\star$ Donner une expression explicite de $N(x, y)$, dessiner la boule unité de $\mathbb{R}^2$ pour N.

Exercice 4. On note $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n.

1. Montrer que $N_1,\ N_\infty : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ données respectivement par
   $N_1(A) = \sum\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} |a_{i.j}|$ et $N_\infty(A) = \max\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} |a_{i.j}|$ sont des normes.
2. Montrer que ces deux normes sont équivalentes.
3. Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$
   (a) $N_\infty(AB) \leqslant n.N_\infty(A).N_\infty(B)$
   (b) $\star$ $N_1(AB) \leqslant N_1(A).N_1(B)$

Exercice 5.

1. Montrer que $N_1, \|\cdot\|_\infty : C^0([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ données respectivement par
   $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ sont des normes.
2. Montrer que : $\forall f \in C^0([0,1],\mathbb{R}),\quad N_1(f) \leq \|f\|_\infty$, mais que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 6. Dans cet exercice, on identifie un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ avec la fonction polynomiale associée, en conservant les mêmes notations. Montrer que

$$N : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ P & \longmapsto \sup\limits_{t\in[0,1]} |P(t) - P'(t)| \end{cases}$$

définit bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On rappelle que si $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\|z\|_1 = |z_1| + |z_2| + |z_3|\,,\ \|z\|_2 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \text{ et } \|z\|_\infty = \max(|z_1|, |z_2|, |z_3|)\,.$$

1. Calculer $\|Ax\|_2$, pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\|Ax\|_2 \leqslant 6\,\|x\|_2$.
3. Trouver $v \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $\|Av\|_1 = 6\,\|v\|_2$.
4. En déduire la norme d'opérateur de la matrice A associé à la norme $\|\cdot\|_2$.
5. Mêmes questions en remplacant $\|\cdot\|_2$ par $\|\cdot\|_\infty$ et par $\|\cdot\|_1$.

Exercice 8.

1. Montrer que $\widetilde{N} : C^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ donnée par $\widetilde{N}(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ est une norme.
2. Montrer que $\forall f \in C^1([0,1],\mathbb{R}),\ \|f\|_\infty \leq \widetilde{N}(f)$, mais que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $\|(x,y)\|_p = (\mid x \mid^p + \mid y \mid^p)^{\frac{1}{p}}$. On admet que cette formule définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que si $p \leqslant q$, alors la boule fermée de centre (0,0) et de rayon 1 de $\|\cdot\|_p$ est incluse dans la la boule unité de $\|\cdot\|_q$.
2. Représenter sommairement les boules fermées de centre (0,0) et de rayon 1 pour des valeurs de p croissantes. (Ces boules ont toujours quatre points communs et sont symétriques par rapport à l'origine)
3. $\star$ Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ faire une conjecture sur $\lim\limits_{p\to+\infty} \|(x,y)\|_p$ et la démontrer.

Exercice 10. $\star\star$ On note $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$. Soit $p \in]1,+\infty[$ On définite $N_p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $f \longmapsto (\int_0^1 |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$

1. (a) Montrer que $\forall (p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$
$$x.y \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$
   (b) En déduire que $\forall (f,g) \in E^2$,
$$\int_0^1 |f(t)g(t)|dt \leqslant \frac{1}{p}.\int_0^1 |f(t)|^p dt + \frac{1}{q}.\int_0^1 |f(t)|^q dt$$
   (c) En déduire **l'inégalité de Hölder**
$$|\int_0^1 f(t)g(t)dt| \leqslant (\int_0^1 |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}.(\int_0^1 |f(t)|^q dt)^{\frac{1}{q}}$$
   Indication On appliquera le résultat de la question précédente à $F(t) = \frac{f(t)}{(\int_0^1 |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}}$ et $G(t) = \frac{g(t)}{(\int_0^1 |g(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}}$.
2. (a) En remarquant que $(p-1)q = p$ et en utilisant l'inégalité de Hölder montrer que
$$\int_0^1 \mid f(t)+g(t) \mid^{p-1} .|f(t)|dt \leqslant (\int_0^1 |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^p dt)^{\frac{1}{q}}$$
   Majorer de manière analogue $\int_0^1 \mid f(t)+g(t) \mid^{p-1} .|g(t)|dt$
   (b) En déduire que N_p vérifie l'inégalité triangulaire.
   (c) Terminer la démonstration du fait que N_p est une norme sur E..
   (d) Démontrer que pour tout $f \in E$ $\lim\limits_{p\to+\infty} (\int_0^1 |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} = N_\infty(f)$