Probabilités, variables aléatoires discrètes

Exercice 1. On considèrera qu'il y a 365 jours dans une année. Quelle est la probabilité de trouver dans un groupe de n personnes prises au hasard, au moins deux nées le même jour ?

Exercice 2. Une association A tient son assemblée. Lors de cette assemblée il est prévu d'élire un directoire de deux personnes. Il y a neuf candidats. Paris eux, six sont aussi membres d'une autre association et deux de ceux-ci sont membres de l'association A depuis plus d'un an. Parmi les trois autres candidats, un seul est membre de l'association A depuis plus d'un an. On suppose que les chances de chacun de ses candidats sont égales.

1. Quelle est la probabilité que l'un des élus soit membre d'une autre association et pas l'autre ?

2. Quelle est la probabilité que les deux élus soient des nouveaux venus ?

3. Quelle est la probabilité qu les deux élus soient des nouveaux venus ou que l'un d'entre eux seulement fasse aussi partie d'une autre association ?

4. Sachant que les deux élus sont aussi membres d'une autre association, quelle est la probabilité qu'ils soient tous deux membres de l'association A depuis moins d'un an ?

Exercice 3. On considére un jeu de 32 cartes pour lequel tous les tirages sont supposés équiprobables.

1. On tire une carte dans le jeu. Montrer que la probabilité que la carte soit un ≪ roi ou une dame ≫vaut $p = 1/4$?

2. On mélange le jeu, on tire une carte on la regarde et on la remet dans le jeu. on effectue 5 tirages successifs. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'on a obtenu ≪ un roi ou une dame ≫.

   — Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?

   — Déterminer la loi de probabilité de X.

   — Calculer son éspérance et sa variance.

3. On effectue n tirages successifs de la même manière. On appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'on a obtenu ≪ un roi ou une dame ≫. Determiner les valeurs de l'entier n telles que la moyenne d'apparition d'un roi ou d'une dame soit supérieure ou égale à 100.

Exercice 4. Un test pour le dépistage d'une maladie étant phase de mise au point, on dispose des précisions suivantes : lorsqu'une personne est atteinte de la maladie, le test s'avère positif avec une probabilité de $0,95$. Lorsqu'une personne n'est pas malade, le test s'avère quand même positif avec une probabilité de $0,02$.

1. On saut que, dans une région donnée, le pourcentage de malades est de 4%. Sachant qu'une personne a un résultat positif au test, calculer la probabilité qu'elle ne soit pas malade.

2. 100 personnes de cette région (les choix de ces personnes sont supposés indépendants) montent dans un avion. Soit X le nombre de personnes malades parmi elles.

   — Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

   — Donner la probabilité qu'il y ait au moins une personne malade parmi elles.

3. Sachant qu'il y a au moins une personne malade parmi elles, quelle est la probabilité qu'il y en ait au plus deux ?

Exercice 5. *Rappel : Soit $Z = (X, Y)$ une variable aléatoire discrète définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E_1 \times E_2 = (x_i, y_j)_{i \in I, j \in J}$, où I, J sont deux ensembles de cardinal finis.*
On définit les lois marginales du couple (X, Y) par $\mathbb{P}_X(X = x) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}\big(X = x, Y = y_j\big)$ et $\mathbb{P}_Y(Y = y) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}\big(X = x_i, Y = y\big)$, où $x, y \in E_1 \times E_2$.

Soient X et Y deux variables aléatoires qui peuvent prendre chacune les valeurs 0 ou 1. Soit p un nombre réel, la loi conjointe du couple (X, Y) est définie par :

(x, y)	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$
$\mathbb{P}\big((X, Y) = (x, y)\big)$	p	$\frac{1}{3} - p$	$\frac{1}{2} - p$	$\frac{1}{6} + p$

1. A quel intervalle doit appartenir le réel p pour que le tableau précédent ait un sens ?
2. Représenter à l'aide d'une tableau les lois marginales de X et Y.
3. Calculer les espérances et les écarts-types de X et Y, ainsi que leur covariance.
4. Determiner la valeur de p pour laquelle les variables X et Y sont indépendantes. Donner la valeur de la covariance dans ce cas.
5. Toujours pour cette même valeur de p, determiner la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 6.
Une entreprise commercialise des composants électroniques dont la durée de vie est suposée aléatoire. On considère que, dans des conditions d'utilisation normales, le composant a une probabilité p de tomber en panne chaque année.
Ce comportement est supposé indépendant d'une année sur l'autre pendant toute sa durée de vie. De même, la valeur de p est supposée inchangée pendant toute la période d'utilisation. On note T l'année durant laquelle le composant tombe en panne ($T = 1$ s'il tombe en panne au cours de la première année, ...).

1. Quelle est la loi de T ?
2. Calculer la durée de vie moyenne d'un composant électronique.
3. Déterminer $\mathbb{P}(T > 3)$, la probabilité que le composant fonctionne au moins 3 ans. Plus généralement, déterminer $\mathbb{P}(T > k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Calculer $\mathbb{P}(T > 5 | T > 2)$, la probabilité que le composant fonctionne plus de 5 ans sachant qu'il est en service depuis 2 ans.
5. Comparer les deux probabilités calculées aux questions précédentes et commenter le resultat.

Exercice 7. Soit X la variable aléatoire ayant pour loi, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = C\frac{\lambda^k}{k!}$.

1. Determiner la valeur de la constante C. On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Soit Y une variable aléatoire de Poisson de paramètre μ. On supposue que Y indépendante de X. Determiner la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 8. Le nombre de truffes trouvées par le cochon Pépito est en moyenne de 1.7 truffes par heure. On modélise ce phénomène par une loi de Poisson.

1. Calculer la probabilité que Pépito ne trouve aucune truffe entre 11h et 12h.
2. Calculer la probabilité que Pépito trouve au moins deux truffes entre 11h et 12h.
3. On note X le nombre de truffes trouvées par Pépito entre 8h et 9h et Y le nombre de truffes trouvées entre 9h et 10h. Calculer la probabilité pour que Pépito trouve 3 truffes entre 8h et 10h.

Exercice 9. *Épreuve B ENSA 2008.* Les cyprinidés du bassin du Liechtenstein se composent de 1000 poissons rouges qui, au cours d'une année, peuvent muter spontanément, indépendamment les uns des autres. La probabilité de mutation d'un poisson au cours de l'année est notée p, avec $p < 10^{-2}$. Pour simplifier, on suppose les poissons immortels.

1. On note X le nombre total de poissons de ce bassin qui mutent lors d'une année. Quelle est la loi de X ?
2. On estime l'espérance de X à 5. En admettant cette valeur, justifier l'utilisation d'une loi de Poisson. Quel est son paramètre ? En déduire la valeur de la probabilité p.
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait un seul mutant cette année ?
4. Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux mutants cette année ?

Exercice 10. Le nombre de gardons pêchés en une journée dans un étang suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 = 2.3$ tandis que le nombre de carpes suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_2 = 3.7$.

1. Étant donné que la capture des carpes n'influe pas sur celle des gardons et vice-versa, quelle est la loi du nombre de poissons pêchés en une journée ? Calculer la probabilité de pêcher au moins deux poissons.
2. Sachant que le quota de carpes est de 10 par jours, quelle est la probabilité de l'atteindre en une journée ?
3. Quelle est la probabilité d'atteindre ce quota au moins une journée au cours du mois de juin ?

Exercice 11. $\star$ Soient X et Y deux variables aléatoires dont la loi du couple est donnée par

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^2 \text{ tels que } q \geq p,\ P(X = p, Y = q) = \frac{\lambda^q}{p!(q-p)!} e^{-2\lambda}$$

1. Montrer que le couple (X, Y) ne pourra prendre d'autres valeurs que celles de l'ensemble $\{(p, q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geq p\}$.
2. Déterminer la loi de X et la loi de Y. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Exercice 12. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, on considére une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{N}$. On définit sa fonction génératrice par $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k)s^k$, où $s \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égale à 1.
2. Montrer que G_X caractérise la loi de X.
3. Supposons que X soit de carré intégrable. Montrer que G_X est deux fois dérivable et exprimer les deux premiers moments de X à l'aide des dérivées de G_X. En déduire une expression de $\mathrm{Var}(X)$.
4. On considère le cas particulier où X suit une loi de Poisson de paramètre λ, determiner G_X.
5. Soit Y une variable aléatoire de Poisson de paramètre μ indépendante de X. Montrer à l'aide des séries génératrice que $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.