

Chapitre 1

Second degré

1.1 Introduction

Définition 1.1.1. Une fonction polynomiale de degré deux (ou trinôme du second degré) est une fonction de la forme

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque. Le domaine de définition de f est l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

Dans ce chapitre nous allons chercher à résoudre des équations, dites du second degré, associées à ce type de fonction. C'est à dire, nous allons résoudre des équations de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \text{ et } (b, c) \in \mathbb{R}^2$$

Nous ferons également le lien entre les solutions de l'équation précédente avec la représentation graphique de la fonction f définie plus haut. Ce genre de considération remonte à l'époque des Babyloniens (8ième siècle avant J.C.) et la résolution des équations du second degré a été débütée par Al-Khwarizmi (dont le nom latinisé fournira le mot « algorithmie ») au 9ième siècle.

Ce genre de fonctions et d'équations apparaissent naturellement dans certains problèmes. Par exemple :

- si nous souhaitons décrire le mouvement effectué par un cycliste (ou skieur, skateboarder, etc) après avoir pris un tremplin,
- si nous cherchions à modéliser l'évolution du nombre de naissance lors d'un « baby boom »,
- enfin, si nous voulions résoudre le problème d'optimisation suivant : étant donné un triangle scalène (quelconque) APB dont le côté AB est de longueur 1, sur lequel nous plaçons un point $M \in [A, B]$ et un point $Q \in [PB]$ de tels sorte que les triangles APM et MQB soient équilatéraux, comment choisir la position du point M pour maximiser l'aire du triangle MPQ ou pour minimiser l'aire du quadrilatère $APQM$?

1.2 Rappels et pré-requis

Pour entamer ce chapitre, certains pré-requis sont nécessaires. Voici une liste, non-exhaustive, de ce qu'il faut savoir maîtriser :

1. Connaître ses identités remarquables.
2. Savoir résoudre des équations de la forme suivante
 - $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$
 - $x^2 - 9 = 0$ ou $x^2 + 2x + 1 = 0$
 - $(3x - 4)(-2x + 5) = 0$ ou encore $2x^2 + 3x = 0$
 - ...
3. De manière similaire, savoir résoudre des inéquations de la forme : $x^2 > 5$, $x^2 < -2$, $x > \frac{2}{x}$...

1.3 Forme canonique

Ce court préambule étant achevé, nous pouvons entamer le début de chapitre. Nous commençons par la *forme canonique* d'un polynôme du second degré. Comme nous allons le voir par la suite, cette écriture particulière d'un trinôme du second degré permet de résoudre facilement les équations du second degré (sous certaines conditions) mais aussi de déterminer les extremums d'une fonction polynomiale de degré deux. Par la suite, nous désignerons constamment (sauf mention explicite du contraire) par polynôme du second degré, une fonction f de la forme suivante :

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 1 (Forme canonique). *Tout polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme canonique*

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant du polynôme.

Démonstration. Soit f un polynôme du second degré : i.e. $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Puisque a est non nul, il est alors possible d'écrire

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

En imaginant que les termes $x^2 + \frac{b}{a}x$ sont le début d'une identité remarquable

$$(x + \dots)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \dots$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\
 &= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right] \\
 &= a \left(x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
 \end{aligned}$$

□

Voici quelques exemples :

Exemple 1.3.1. 1. Si $f(x) = x^2 + x + 1$, nous avons alors

$$f(x) = (x^2 + x) + 1 = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}.$$

2. Si $f(x) = x^2 - 2x - 15$, nous avons alors

$$f(x) = (x^2 - 2x) - 15 = (x - 1)^2 - 1 - 15 = (x - 1)^2 - 16$$

3. Si $f(x) = x^2 + 2x + 1$, alors

$$f(x) = (x + 1)^2 + 0$$

1.4 Représentation graphique d'un polynôme du second degré

Nous allons maintenant présenter des propriétés graphiques de polynômes du second degré. Dans ce qui suit, f désigne encore un polynôme de degré deux dont nous rappelons sa forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \quad x \in \mathbb{R}$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$.

Remarque. Pour éviter de retenir la formule permettant de calculer β , il est possible de se souvenir que β correspond à $f(\alpha)$. Ainsi, une fois α déterminé, il ne reste qu'à déterminer son image par f pour trouver β .

Proposition 2 (Variations et extremum). *La courbe représentative de la fonction f , que nous noterons C_f , est une parabole dont l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \alpha$ et dont le sommet S a pour coordonnées $S(\alpha; f(\alpha) = \beta)$.*

De plus, si $a > 0$, f atteint son minimum au point α (cf. figure) :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\swarrow \quad \quad \searrow$ β		

En revanche, si $a < 0$, f atteint alors son maximum en ce même point (cf. figure) :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow \quad \quad \nwarrow$ β		

Démonstration. A partir de la forme canonique et en s'appuyant sur le cours de 2nd, nous remarquons que f est une parabole dont les paramètres sont donnés par les réels (a, α, β) . Nous distinguons alors deux cas de figure :

- Si $a > 0$, la fonction $g(x) = a(x - \alpha)^2$ est décroissante pour $x \leq \alpha$ et croissante pour $x \geq \alpha$. De plus, elle admet un minimum en $x = \alpha$. Par conséquent, la fonction f étant une translation de g , f admet les mêmes variations. Le point minimal de sa courbe représentative est donné par $S(\alpha, f(\alpha))$.
- Si $a < 0$, la fonction g a des variations opposées au cas précédent. La fonction f admet alors un maximum en $x = \alpha$.

□

Remarque. Lorsque $a > 0$ (resp. $a < 0$), il est coutume de dire que la parabole est orientée vers le bas (resp. vers le haut).

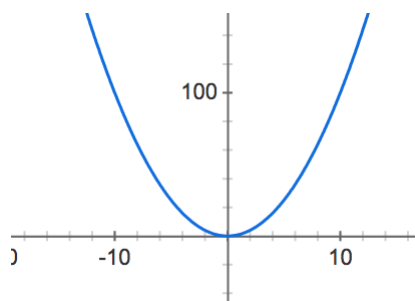
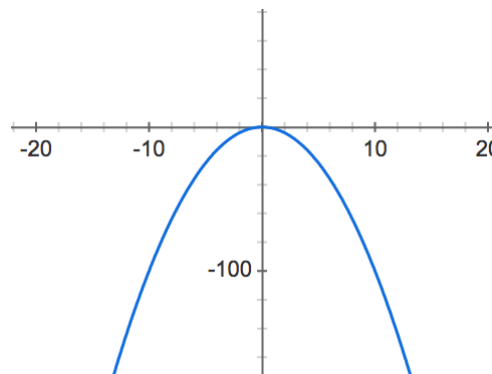


FIGURE 1.1 – $a > 0$

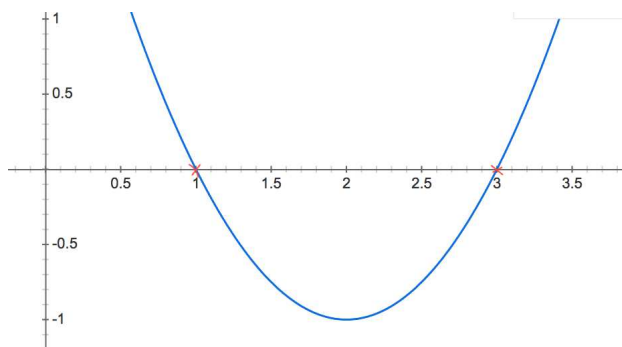
Maintenant que nous avons établi que la courbe représentative d'un polynôme du second degré était une parabole, nous pouvons compléter notre étude en utilisant les tableaux de signe de la section précédente. Géométriquement, nous allons voir que les racines de f correspondent aux points d'intersections entre C_f et l'axe des abscisses.

Proposition 3 (Position par rapport à l'axe des abscisses). *Dans le même contexte que ce qui précède, nous avons à nouveau trois cas de figures :*

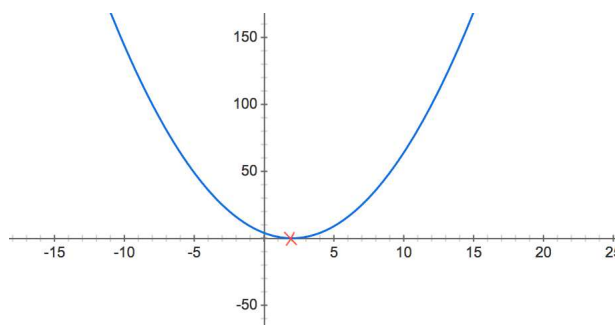
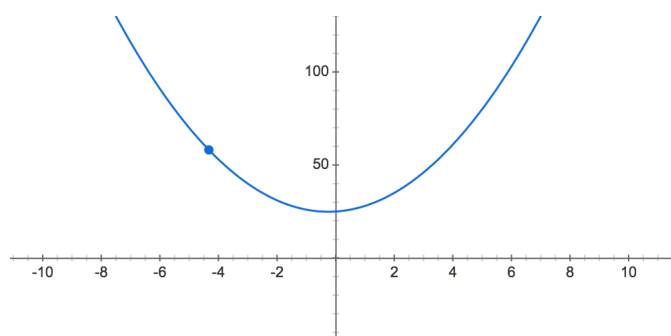
FIGURE 1.2 – $a < 0$

1. Si $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ ayant deux solutions, la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en *deux points* d'abscisse x_1 et x_2 .
2. Si $\Delta = 0$, l'équation $f(x) = 0$ ayant une solution, la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en *un point* d'abscisse x_0 .
3. Si $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'ayant aucune solution, la courbe C_f ne rencontre *jamais* l'axe des abscisses et reste du signe de a .

Exemple 1.4.1. Voici trois exemples, pour lesquels $a > 0$, illustrant les cas de figures envisageables.

FIGURE 1.3 – $\Delta > 0$: deux racines distinctes en $x = 1$ et $x = 3$

Remarque. Comme nous le verrons ces résultats coïncideront avec ce que nous obtiendrons par le calcul concernant sur le signe d'un polynôme du second degré.

FIGURE 1.4 – $\Delta = 0$: 1 racine (double) en $x = 2$ FIGURE 1.5 – $\Delta < 0$: pas de racines réelles

1.5 Exercices potentiels

- Coefficients d'un polynôme : 7, 8, 9p96 +exo python : tester si un nombre est racine.
- Variation d'un polynôme du second degré f et extrema (minimum ou maximum) avec ses coordonnées : 12, 13, 15, 16, 18p.96 – 97
- résoudre des équations 22p97

1.6 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Forme canonique d'un polynôme de degré 2 f .
- Variation d'un polynôme du second degré f et extrema (minimum ou maximum) avec ses coordonnées.

- Représentation graphique complète.

