Chapitre 2

Vecteurs

2.1 Introduction

La géométrie Euclidienne (enseignée au collège et au lycée) trouve ses sources dans les treize livres composant les *Eléments* en -300 avant *J.C.*. Il s'agit du premier ouvrage connu, écrit par Euclide lui même, proposant un traitement axiomatique et systématique de la géométrie. Dans ce cours, nous allons aborder une vision différentes des géomètres grecs de ces objets. En effet, nous allons nous concentrer sur le calcul vectoriel et le recours aux systèmes de coordonnées. C'est dans son ouvrage *Géométrie* (1637) que Descartes suggère de représenter les objets géométriques par des lettres et de chercher à obtenir des équations liant celles-ci. Pierre de Fermat fut l'un des premiers mathématiciens à utiliser systématiquement un repère orthonormée et des coordonnées pour étudier des droites, paraboles, hyperboles. Ses idées sont présentées dans l'ouvrage *Ad locus planos et solidos isagoge*. A titre d'exemple, les jeux vidéos actuels reposent sur des logiciels de modélisation numérique dont une majeure partie repose sur du calcul vectoriel.

Dans un premier temps, nous allons faire quelques rappels sur les vecteurs. Nous aborderons ensuite la notion de colinéarité, de décomposition d'un vecteur suivant un repère.

2.2 Rappels : généralité sur les vecteurs

Dans ce qui suit, nous considérons le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère (O, I, J) ainsi que A, B, C et D quatres points distincts du plan.

Rappellons les résultats obtenus en classe de seconde.

Proposition 7.
- *[Caractérisation] Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est caractérisé par sa direction, son sens et sa longueur.*
- *[Construction] Pour tout point A et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point M du plan tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$.*

- *[Relation de Chasles]* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- *[Coordonnées] Si A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.*
- *[Multiplication] Si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x_u; y_u)$ alors, pour tout réel k, le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(kx_u; ky_u)$.*

Exemple 2.2.1. Soient $A(1;2)$, $B(7;4)$ et $C(4;3)$. Alors

1. $\overrightarrow{AB}(6;2)$, $\overrightarrow{AC}(3;1)$ et $\overrightarrow{BC}(3;-1)$.
2. $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $(-6;-2)$ et vérifie $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est désigné comme le vecteur opposé de $\overrightarrow{BA}$./
3. De plus, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ est appelé le vecteur nul.

Rappelons également les propriétés suivantes :

Propriétés 1.

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Le point C est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Remarque. Une autre manière d'exprimer que C est le milieu du segment $[AB]$ est d'avoir l'identité vectorielle $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

2.3 Colinéarité entre deux vecteurs

2.3.1 Définition et conséquences

La notion de parallélisme entre deux droites se retranscrit de manière vectorielle par celle de colinéarité. Voici la définition de cette nouvelle notion.

Définition 2.3.1. *Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.*

Remarque. Deux vecteurs colinéaires ont donc la même direction (mais pas forcément le même sens). Par convention, le vecteur $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tous les autres vecteurs du plan.

Voici également deux conséquence de cette définition :

1. $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CD}$ si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2. Les points A, B et C du plan (distincts deux à deux) sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2.3.2 Critère de colinéarité

Par la suite nous considérons $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ deux vecteurs dont les coordonnées sont exprimées dans un repère (O, I, J).

Définition 2.3.2. *Le nombre réel $xy' - yx'$ est appelé* déterminant *des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Nous le noterons par*

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \det(A) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx$$

Proposition 8. *Les vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ sont colinéaires si et seulement si* $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

Remarque. Autrement dit, ce critère nous assure que la colinéarité entre deux vecteurs signifie que leurs coordonnées sont proportionelles.

Démonstration. Procédons par équivalence.

1. Supposons que les vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ soient colinéaires. Par définition, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$. En conséquent, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ s'expriment en fonction de celle de $\overrightarrow{v}$. C'est-à-dire : $(x, y) = (kx', ky')$. Ainsi,

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - yx' = kx'y' - ky'x' = k(x'y' - x'y') = 0$$

2. Supposons que l'identité $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - yx' = 0$ soit vérifiée. Si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur nul, par convention $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires. Maintenant si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, c'est que l'une de ses coordonnées est non nulle. Supposons qu'il s'agisse, par exemple, de la première coordonnée x. Nous pouvons alors utiliser la relation $xy' - yx' = 0$ pour obtenir

$$y' = \frac{x'}{x}y$$

En d'autres termes, $y' = ky$ avec $k = \frac{x'}{x} \in \mathbb{R}$. Ainsi $(x', y') = k(x, y)$ et donc $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$, les vecteurs sont bien colinéaires. Par symétrie, la même démonstration fonctionne *mutatis mutandis* si $x = 0$ et $y \neq 0$.

□

Voici quelques court exemples mettant en jeu le calcul vectoriel et la colinéarité.

Exemple 2.3.1.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}(2, 5)$ et $\overrightarrow{v}(3, \frac{15}{2})$ sont colinéaires car $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 2 \times \frac{15}{2} - 5 \times 3 = 0$.

2. Dans un repère $(O; I; J)$, considérons les points $A(-4; 4)$, $B(5; 8)$ $C(-2; 0)$ et $D(8; 2)$. Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?

3. Dans un repère $(O; I; J)$, considérons un point $M(5; -4)$. Démontrer que ce point appartient à la droite (IJ).

Exercice 1. Proposer un algorithme permettant de savoir si trois points sont alignés.

2.4 Décomposition d'un vecteur

2.4.1 Différents repères du plan

Rappelons les différents repères du plan $(O; I; J)$ rencontrés en classe de 2nd, nous adopterons les notations suivantes par la suite : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$.

Définition 2.4.1. 1. *Tout d'abord, le repère* orthonormé *: cela signifie que les droites (OI) et (OJ) sont orthogonales (perpendiculaires) et que les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont tous les deux de même norme.*

2. *Un repère est dit* orthogonale *si les droites (OI) et (OJ) sont orthogonales sans pour autant que les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ soient forcément de même norme.*

3. *Un repère quelconque nécessite simplement que les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ soient non colinéaires.*

Remarque. • Choisir un repère consiste donc à choisir un point servant d'origine (ici O) ainsi que deux vecteurs non colinéaires (ici $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$). Un tel repère sera alors noté $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

- Un tel repère étant fixé, dire qu'un point M a pour coordonnées (x, y) signifie que

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$

- Par définition, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{w}$ dans un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ sont celles de l'unique point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{w}$.

2.4.2 Décomposition d'un vecteur

Considérons $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non-colinéaires du plan. Etant donné, un vecteur $\overrightarrow{w}$ du plan, il est toujours possible de décomposer celui-ci suivant les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Plus précisément, nous avons le théorème suivant :

Théorème 9. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan. Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ du plan, il existe un unique couple de réels $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tels que*

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$$

Démonstration. Notons par U (respectivement V) l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{u}$ (respectivement $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{v}$). Similairement, désignons par M l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{w}$.

1. (Existence de la décomposition) Observons que la droite parallèle à (OV) passant par le point M coupe la droite (OU) en un point x et que la a droite parallèle à (OU) passant par le point M coupe la droite (OV) en un point y. Autrement dit, M a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \overrightarrow{j})$.

   De plus, $OxMy$ est un parallélogramme donc

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Ox} + \overrightarrow{Oy}.$$

En outre, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{Ox}$ sont colinéaires : il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{Ox} = a\overrightarrow{u}$. De manière simialre, par colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{Oy}$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{Oy} = b\overrightarrow{v}$. Par conséquent, après substitution, nous obtenons

$$\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$$

2. (Unicité de la décomposition). Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe deux décompositions $(a;b)$ et (a',b') du vecteur $\overrightarrow{w}$ pour aboutir à une contradiction. Autrement dit, nous supposons que les deux égalités suivantes sont satisfaites pour des couples $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a',b') \in \mathbb{R}^2)$:

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{w} = a'\overrightarrow{u} + b'\overrightarrow{v}$$

Ces identités nous permettent d'obtenir alors que $a\overrightarrow{u} - a'\overrightarrow{u} = b'\overrightarrow{v} - b\overrightarrow{v}$. D'où,

$$(a - a')\overrightarrow{u} = (b' - b)\overrightarrow{v}.$$

Si $a \neq a'$ nous en déduisons alors que $\overrightarrow{u} = \frac{b'-b}{a-a'}\overrightarrow{v}$. Autrement dit, $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$. Ceci est absurde au vu de nos hypothèses et donc $a = a'$. Similairement, nous obtenons également $b = b'$ par le même raisonnement.

□

2.4.3 Application

Exemple 2.4.1. Voyons de quelle manière le calcul vectoriel nous permet de faire de la géométrie. Soit AGF un triangle non aplati.

1. Placer les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{GC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GF}$.

2. Démontrer que les points A, B et C sont alignés en utiliser le calcul vectoriel, puis en choisissant un repère du plan adéquat.

2.5 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Manipuler les opérations élémentaires du calculs vectoriels (milieu, relation de Chasles,...)
- Choisir un repère adéquat pour résoudre un exercice à l'aide des coordonnées .
- Maitriser la notion de colinéarité et ses caractéristiques.
- Décomposer un vecteur suivant dans un repère.

2.6 Pour en savoir plus

2.6.1 Quelques remarques sur la géométrie non euclidienne

Au début de ce chapitre nous avons annoncer que nous allions étudier la géométrie euclidienne d'un point de vu vectoriel. Cet énoncé sous-entend qu'il existerait des géométries *non euclidienne*. Que pourraient-elles êtres et quelles seraient les différences avec la géométrie enseigner dans l'enseignement primaire et secondaire ?

Pour mieux comprendre ceci il est utile de revenir aux *Eléments* d'Euclide. Dans son traité, Euclide construit toute la géométrie que nous connaissons (propriétés des triangles équilatéraux, etc,. . .) à l'aide de raisonnements logico-déductif à partir d'une liste de cinq axiomes. Par exemple : « *un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts* »dont la véracité semble tellement évident à nos yeux qu'il ne parait pas déraisonnable de supposer une telle assertion vraie. En revanche, parmi ces axiomes, l'un d'entre eux est un peu particulier : après reformulation, celui-ci s'énonce comme suit

Par un point extérieur à une droite, il passe toujours une parallèle à cette droite, et une seule.

Cette affirmation ressemble étrangement à la conclusion d'un Théorème qui n'aurait pas de démonstration. Cela à intriguer les mathématiciens, notamment Sacherri qui tenta, au 17ème siècle, de manière infructueuse, de proposer une démonstration par l'absurde de cette assertion. En 1813, Gauss écrit : « Pour la théorie des parallèles, nous ne sommes pas plus avancés qu'Euclide, c'est une honte pour les mathématiques ». Il fallu encore un peu de temps aux mathématiciens pour découvrir ces nouvelles géométries.

Une manière, peut-être un peu grossière, de mettre en évidence l'existence de celles-ci est de parler de plus court chemin : si nous dessinons deux points A et B sur une feuille, ils nous semblent évident que le plus court chemin pour aller de l'un à l'autre est la ligne droite. Que se produirait-il si nous placions ses points à la surface de la Terre, l'un à Tokyo et l'autre à Lille par exemple ? Déj), il semble un peu plus délicat de parler de ligne droite à la surface de la Terre . . .

La Terre nous fournit un premier exemple sur lequel il est possible de faire de la géométrie non euclidienne, il s'agit de la géométrie sphérique. En effet, celle-ci propose des différences notoire avec ce que nous connaissons : le Théorème de Pythagore n'est plus vérifié si nous dessinons un triangle sur un ballon ! Il est même possible de dessiner sur ce même ballon un triangle possédant trois angles droits ! Cette géométrie diffère de celle d'Euclide car le ballon est courbé (positivement) tandis que notre feuille de dessin est toute plate.

Il est également possible de parler de courbure négative en faisant de la géométrie hyperbolique. A titre d'exemple, il est facile de décrire celle-ci : il suffit de prendre l'intérieur d'un bol et d'imaginer que des petits êtres vivent à l'intérieur. Du fait de sa courbure, il est beaucoup plus difficile et plus long, pour eux, de se déplacer vers le bord de ce bol tandis qu'il est plus aisé de se promener vers le centre de ce même bol. Ainsi, le plus court chemin entre deux points de ce bol ne correspondrait pas à des lignes droites mais plutôt à des arcs de cercles où les individus chercheraient à se rapprocher, dans un premier temps, du centre avant de s'éloigner à nouveau vers leur destination.

Bien entendu, ces géométries sont plus complexes à enseigner que celle d'Euclide mais elles n'en sont pas moins passionnantes. Voici quelques grands mathématiciens qui ont contribué à faire évoluer (bien longtemps après les découverts d'Euclide) l'étude de géométrie non-euclidienne : Lobatchevski en 1829, Riemann en 1867 ou encore Poincaré en 1902.

Ces géométries peuvent sembler un peu étranges, voir abstraites et n'être que des jeux auxquels se prêtent les mathématiciens. Il n'en est rien ! A titre d'exemple, la géométrie sphérique peut-être utiliser en aviation (pensez au vol Tokyo-Lille), mais le plus frappant est peut-être la découverte de la relativité (en 1905 puis 1915) par Einstein dont les modèles mathématiques « d'espace-temps »reposent sur de la géométrie non euclidienne.

2.6.2 Curiosité en grande dimension

Il n'est pas vraiment possible pour l'être humain de se représenter un objet en quatre dimension (ou plus). Il est cependant possible de conceptualiser ce qui doit se produire. Imaginons que nous surplombions un monde vivant dans une feuille en papier, un monde en deux dimension. Si nous prenions un cube de notre univers, les habitants de ce monde ne pourraient l'apercevoir qu'au moment ou une partie du cube traverse la feuille de papier et pénètre dans leur monde. En faisant ceci, les habitants observeraient une tranche du cube et seraient face à un carré. Il n'est donc pas difficile de généraliser ce procédé en se disant que si des êtres nous observaient depuis un monde en quatre dimension et s'amusaient à vouloir nous montrer un cube de leur univers (en quatre dimensions) nous ne verrions qu'une tranche de celui-ci et ferions face à un cube normal.

Bien que notre intuition soit un peu gênée par des espaces de dimension supérieurs à trois, ces ensembles interviennent très rapidement lors de l'étude de certains problèmes. En effet, grossièrement, ajouter une dimension revient à considérer un paramètre supplémentaire. Par exemple, pour décrire le mouvement d'un oiseau nous avons besoin de connaître sa position dans l'espace. En revanche, il est possible que nous ayons également besoin de connaitre la durée de son mouvement, la pression atmosphérique, la température, etc . . . la considération de ceci force à introduire plus de dimensions pour prendre en compte ces nouveaux paramètres. En statistiques, certains problèmes de modélisation comme la météorologie met en jeu plusieurs milliers de paramètres.

L'un des intérêts majeur des coordonnées cartésiennes est que nous pouvons étudier des choses qui dépasse notre imagination. En effet, pour ajouter une dimension il suffit d'ajouter une coordonnée à notre vecteur. Il devient donc possible de faire des calculs sur des choses que nous ne pouvons visualiser. Cela va parfois à l'encontre de notre intuition. Voyons ceci au travers d'un exemple.

Débutons dans le plan et considérons un carré de côté 4 dont le centre est placé en $(0, 0)$. Plaçons des disques de rayon 1 dans les zones suivantes : un premier disque centré au point $(1; 1)$, un deuxième en $(1; -1)$, un autre en $(-1; 1)$ et un dernier en $(-1; -1)$. Il est alors possible de placer un dernier disque en $(0; 0)$ puis de l'agrandir jusqu'à ce qu'il touche les quatre disques que nous avons disposer. dans le carré au préalable.

Bien sûr, il est possible de procéder de manière similaire dans l'espace. Cette fois-ci nous avons un cube de côté 4, 8 boules de rayon 1 centrées aux points $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$ et enfin une dernière boule placée en $(0; 0; 0$ dont le rayon est plus grand possible (avec pour condition que cette nouvelle boule ne puisse empiéter sur les autres).

A vrai dire, pourquoi s'arrêter en si bon chemin ? Il n'est plus possible de faire de dessin mais nous pouvons imaginer un hypercube de côté 4 (que nous noterions $[-2; 2]^d$) en dimension d et placer des boules aux points $(\pm 1; \ldots, \pm 1)$ comme auparavant pour enfin placer une dernière boule au centre avec les mêmes restrictions qu'auparavant.

A partir de quelle dimension cette dernière boule dépasse du cube $\quad [-2; 2]^d$?

De manière intuitive, nous serions tenter de répondre : jamais ! Voyons ce que nous disent les calculs. Nous avons vu que la distance d'un point $M = (x_1; x_2)$ à l'origine valait

$$d(O, M) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

En dimension d, il s'agit de la même formule. C'est-à-dire, si M a pour coordonnées $(x_1; x_2; \ldots, x_d)$ (il n'est plus vraiment possible de parler d'abscisses ou d'ordonnées, nous numérotons donc les coordonnées par des nombres $x_1, \ldots, x_d$) nous avons la formule suivante :

$$d(O, M) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2}$$

Or, dans le problème que nous considérons les points M, centres des boules, ont des coordonnées de la forme $(\pm 1; \ldots; \pm 1$ donc $d(O, M) = \sqrt{d}$. Ainsi, puisque ces boules sont de rayon 1, cela entraine que le plus grand rayon possible pour la boule centrale vaut $\sqrt{d} - 1$. En conséquence, la boule centrale déborde du cube si

$$\sqrt{d} - 1 > 2 \quad \iff \quad d > 9$$

ce qui n'était pas du tout intuitif. En fait, il est même possible de préciser ce résultat. Il s'agit d'un domaine des mathématiques qui s'appelle *la concentration de la mesure*. L'un des résultats de cette théorie permet d'affirmer que le volume de la boule centrale restant dans le cube s'approche très vite (exponentiellement vite) de zéro lorsque la dimension devient de plus en plus grande.

2.6.3 Distance

La distance que nous venons de voir s'appelle la distance euclidienne. Il existe d'autre façon de mesurer la distance entre deux points, l'une d'elle s'appelle la distance de « Manhattan » (en rapport avec le quartier de New-York). La raison derrière cette terminologie est la suivante : la plupart des villes américaines sont construites sur la forme d'un quadrillage. Ainsi, pour rejoindre un point A à un point B de la ville, nous sommes forcés de suivre ce quadrillage et d'arpenter les côtés des carrés de ce quadrillage. Ainsi, la distance calculée correspond à celle qui est effectivement parcouru à pied plutôt que celle obtenue « à vol d'oiseau ».

Formellement, si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors

$$AB = |x_A - x_B + |y_A - y_B|$$

où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue d'un nombre réel. Cette formulation n'engendre que très peu de différences notables avec la géométrie classique (grossièrement tout diffère d'une constante multiplicative universelle). En revanche, certain objets bien connu sont un peu modifiés. Pour voir cela nous devons adopter quelques notations : $d_2(A, B)$ pour désigner la distance euclidienne (celle vu en cours) entre deux points et par $d_1(A, B)$ pour la distance de Manhattan. Avec ces notations, il est possible de définir un disque de centre A et de rayon $r > 0$ comme étant l'ensemble des points M vérifiant :

$$d_2(A, M) \leq r$$

et nous obtiendrons la figure classique que vous avez pu rencontré au collège. En revanche, si nous remplaçons d_2 par d_1 dans le formule précédente, notre cercle prendra alors la forme d'un carré !

Il existe d'innombrables distances en mathématiques, chacune ayant une utilité, les quelques mots précédents ne font qu'effleurer la surface de cette notion.