Chapitre 7

Dérivée et variations d'une fonction et sens de variations

Nous avons déjà rencontré la notion de fonction dérivée dans un chapitre précédent. Ici, nous allons enfin voir de quelle manière l'étude du signe de la fonction dérivée permet d'obtenir des informations sur le sens de variations d'une fonction et de déterminer l'existence d'éventuels extremums. Par la suite $f : I \to \mathbb{R}$ désignera une fonction dérivable sur un *intervalle* ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

Théorème 27 (Variations)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*

1. *Si $f'(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ alors $x \mapsto f(x)$ est une fonction croissante sur I.*

2. *Si $f'(x) \leq 0$, $x \in \mathbb{R}$ alors $x \mapsto f(x)$ est une fonction décroissante sur I.*

3. *Si $f'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ alors $x \mapsto f(x)$ est une fonction constante sur I.*

Remarque. Il est possible de définir de manière similaire la notion de fonction strictement croissante ou strictement décroissante si l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes dans les points 1 et 2 de la proposition précédente.

Exemple 7.0.1. La fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 12$ est dérivable et $f'(x) = x^2 + x - 2$. Il faut à présent étudier le signe de f'. Un rapide calcul du discriminant associé montre que f' admet deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$. Nous pouvons donc dresser le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

puisque $a = 1 > 0$. En conséquence de ceci, il est possible d'en déduire (à l'aide du théorème précédent) le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f(-2)$	↘ $f(1)$	↗

Remarque. Il est essentiel de suivre les étapes suivantes lors de l'étude d'une fonction :

1. Déterminer le domaine de définition et de dérivation (lorsque cela est demandé) ;
2. Calculer f' et étudier son signe ;
3. Déterminer les variations et la nature des extremums (s'ils existent) ;
4. Proposer une graphique représentant de manière fidèle la courbe en indiquant les tangentes horizontales.
5. Il est parfois demander de calculer l'équation d'une tangente T, puis d'étudier la position relative entre C_f et T.

Lorsque la fonction dérivée s'annule et change de signe autour d'un point, cela permet de détecter la présence d'extremums. A ce propos rappelons la définition suivante.

Définition 7.0.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$.*

- *$x_0 \in I$ est un maximum local, s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \textit{pour tout} \quad x \in J$$

- *$x_0 \in I$ est un minimum local, s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que*

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \textit{pour tout} \quad x \in J$$

Remarque. Le maximum ou le minimum sera dit global s'il est possible de choisir $J = I$ dans la définition précédente. Un extremum désigne sans distinction un maximum ou un minimum d'une fonction

Théorème 28 (Extremums)**.** *1. Si $x_0 \in I$ est un extremum de f alors $f'(x_0) = 0$.*

2. S'il existe un réel x_0 tel que $f'(x_0) = 0$ et que la dérivée change de signe autour de x_0 (par exemple $f'(x) > 0$ si $x > x_0$ et $f'(x) < 0$ si $x < x_0$ alors $f(x_0)$ est un extremum (local) de f.

Remarque.

1. Attention, si la dérivée s'annule en un point mais ne change pas signe autour de ce point, il ne s'agit pas d'un extremum. Par exemple, si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 2x^2$ et $f'(0) = 0$ mais f' ne change pas de signe et 0 n'est pas un extremum de f.
2. Il est usuel d'appeler points critiques les valeurs annulant la dérivée.

Exemple 7.0.2. Etudions les variations de la fonctions $f(x) = \frac{x^2-6x}{x+2}$.

1. Tout d'abord il convient d'observer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$. Sur cet ensemble, f est le quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais : f est donc dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.
2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{x^2+4x-12}{(x+2)^2}$. Pour cela, utilisons la formule de dérivation d'un quotient
$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
avec $u(x) = x^2 - 6x$ et $v(x) = x + 2$. Nous trouvons alors que
$$u'(x) = 2x - 6 \quad \text{et} \quad v'(x) = 1.$$
Par suite,
$$f'(x) = \frac{(2x-6)(x+2) - (x^2-6x)\times 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-6x-12-x^2+6x}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-12}{(x+2)^2}.$$
3. Pour déterminer les variations de f, il convient alors d'étudier le signe de f'. Pour cela, il faut traiter séparement le numératueyr et le dénominateur.
   (a) Pour le numérateur, il suffit d'employer Δ. Ici, $\Delta = 4^2 - 4\times 1\times(-12) = 64 > 0$. Il existe donc deux racines
   $$x_1 = -6 \quad \text{et} \quad x_2 = 2$$
   Le signe du numérateur sera ensuite déterminer par celui de $a = 1 > 0$.
   (b) Pour le dénominateur, il suffit d'observer que $(x+2)^2 \geq 0$ et que $(x+2)^2 = 0 \iff x = -2$.

   En résumé, nous avons :

x	$-\infty$		x_1		-2		x_2		$+\infty$
$x^2 + 4x - 12$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x + 2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

   Il est important de ne pas oublier la *double barre* dans la dernière ligne pour signifier que la valeur -2 ne peut pas être choisie.

4. A présent, le signe de $f'(x)$ permet alors d'obtenir les variations de f :

x	$-\infty$	-6	-2	2	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f(-6)$	↘	$f(2)$	↗

avec $f(x_1) = -18$ et $f(x_2) = -2$.

5. Nous observons donc qu'il y a deux extremum locaux :
   (a) un minimum local -18 en $x = -6$
   (b) un maximum local -2 en $x = 2$.

   En ces points, les tangentes sont horizontales.
6. Voyons s'il est possible que C_f admette une tangente parallèle à la droite $\mathcal{D}$ d'équation

$$y = -2x + 4.$$

   Pour que cela soit le cas, il faut et il suffit que ces droites aient le même coefficient directeur. Autrement dit, il faut résoudre

$$f'(x) = -2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2 + 4x - 12}{(x+2)^2} = -2.$$

   Pour résoudre cette équation, nous pouvons multiplier le membre de gauche et de droite afin de se débarrasser du dénominateur :

$$\frac{x^2 + 4x - 12}{(x+2)^2} = -2. \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 4x - 12 = -2(x+2)^2.$$

   Il ne reste plus qu'à developper le membre de gauche pour ensuite placer tout les termes dans le membre de droite (par exemple) :

$$x^2 + 4x - 12 = -2x^2 - 8x - 8 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x^2 + 12x - 4 = 0.$$

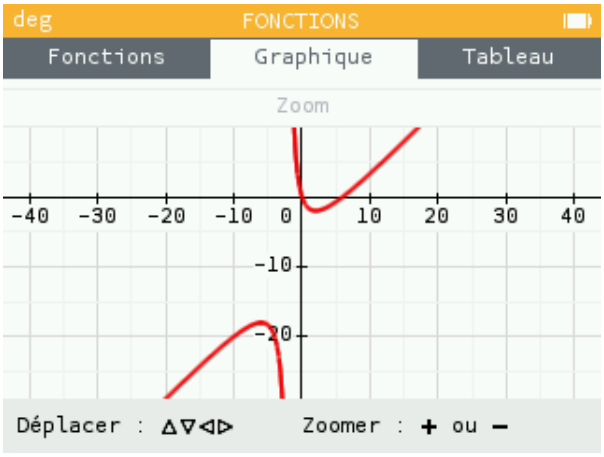
   Pour conclure, il suffit d'utiliser Δ. Ici, $\Delta = (12)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 144 + 48 = 192 > 0$. Il y a donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-12 + 8\sqrt{3}}{6} = \frac{-4 + 8\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 - 8\sqrt{3}}{3}.$$

   En ces points, C_f admet des tangentes parallèles à la droite $\mathcal{D}$.
7. Le tableau de variations permet aussi d'obtenir un encadrement précis de la fonction f sur un intervalle I donné. Par exemple, si $I = [0; 2]$, nous voyons (d'après le tableau de variation) que f est décroissante sur cet intervalle. Par suite, nous avons

$$f(0) \geq f(x) \geq f(2) \quad \text{pour tout} \quad x \in [0;2] \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \geq f(x) \geq -2 \quad \text{pour tout} \quad x \in [0;2].$$

8. Enfin, il est possible de tracer la courbe dans un repère orthonormé :



7.1 Bilan du chapitre

- Etudier les variations d'une fonction à l'aide sa dérivée. Déterminer les éventuels extremums d'une fonction.
- Applications dans différents contexte, problème d'optimisation.