Chapitre 7

Résolution d'inéquation et tableau de signe

Ce chapitre est assez proche de celui qui concernait la résolution d'équation.

Définition 7.0.1. *Résoudre une inéquation dans un ensemble de réels D, c'est trouver* ***tous les éléments*** *de D qui vérifient l'inégalité donnée.*

Exemple 7.0.1. 1. 3 est solution de l'inéquation $2x - 5 > 0$ car $2 \times 3 - 5 = 1 > 0$.

2. -2 n'est pas solution de l'inéquation $2x - 5 > 0$ car $2 \times (-2) - 5 = -9 < 0$.

Dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des solutions de $2x - 5 > 0$ est l'intervalle $]\frac{5}{2}; +\infty[$ car

$$2x - 5 > 0 \quad \iff x > \frac{5}{2}$$

Voyons plutôt quels moyen ont été mis en oeuvre pour résoudre l'inéquation précédente.

7.1 Outils pour la résolution algébrique d'inéquations

7.1.1 Règles pour résoudre une inéquation

Les propriétés suivantes décrivent les opérations qu'il est possible de faire sur une inéquation

Propriétés 6. 1. **Ajouter ou soustraire** un même nombre à chaque membre d'une inégalité **ne change pas** le sens de celle-ci.

2. Si $a > 0$ alors **multiplier ou diviser** par a les deux membres d'une inégalité **ne change pas** le sens de celle-ci.

3. Si $a < 0$ alors **multiplier ou diviser** par a les deux membres d'une inégalité **change** le sens de celle-ci.

Exemple 7.1.1. 1. $2x - 5 > 0 \iff 2x > 5 \iff x > \frac{5}{2}$.

2. $4 - 3x < 0 \iff -3x < -4 \iff x > \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$.

7.2 Tableau de signe

Les techniques précédentes permettent d'établir des tableaux de signes (savoir à quel moment une quantité dépendant de x est positive ou négative). Il s'agit d'un point majeur du programme qui permettra de résoudre toutes les inéquations rencontrées en cours.

Proposition 15 (Signe de $ax + b$)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, les résultat suivant donnent le signe du polynôme du premier degré $x \mapsto ax + b$.*

1. *Si $a < 0$ alors*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax + b$		$+$	0	$-$	

2. *Si $a > 0$ alors*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax + b$		$-$	0	$+$	

Ces résultats, combinés à une règle de signe évidente, permet de résoudre des inéquations produit ou quotient. Voyons plutôt sur des exemples.

7.2.1 Signe d'un produit

Supposons que nous souhaitons résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $36 - 4x^2 \geq 0$.

1. Il est essentiel de factoriser l'expression précédente afin de se ramener à un produit de polynômes du premier degré :

$$36 - 4x^2 \geq 0 \iff 6^2 - (2x)^2 \geq 0 \iff (6 + 2x)(6 - 2x) \geq 0$$

où nous avons utilisé l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ pour factoriser le membre de gauche.

2. Nous allons dresser un tableau de signe à partir de la proposition 15 qui va permettre de résoudre l'inégalité ci-dessus.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
signe de $6-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $6+2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(6-2x)(6+2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Commentons le tableau précédent. La proposition 15 permet d'obtenir le signe de la deuxième et troisième ligne. La dernière ligne est obtenue en utilisant la règle suivante :

$$+\times+=+,\quad +\times-=-\quad \text{et}\quad -\times-=+.$$

Cette dernière ligne fournit donc le signe du produit $(6-2x)(6+2x)$. Ainsi, la solution de notre inégalité est l'intervalle $[-3;3]$. Autrement dit,

$$36-4x^2\geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x\in[-3;3]$$

7.2.2 Signe d'un quotient

Bien entendu, tous ce qui précède peut-être appliquer pour résoudre une inéquation faisant intervenir un quotient. Il faudra cependant être prudent et indiquer dans le tableau de signe la présence d'une valeur interdite.

Par exemple, résoudre l'inéquation $\frac{x+4}{x-2}\geq 0$ revient à déterminer le signe du quotient.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+4}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

A nouveau, commentons le tableau précédent. La proposition 15 permet d'obtenir le signe de la deuxième et troisième ligne. La dernière ligne est obtenue en utilisant la règle suivante :

$$\frac{+}{+}=+,\quad \frac{+}{-}=-\quad \text{et}\quad \frac{-}{-}=+.$$

Cette dernière ligne fournit donc le signe du quotient $\frac{x+4}{x-2}$. La présence de la double barre dans la dernière ligne est là pour indiquer que 2 est une valeur interdite. Finalement, la solution de notre inégalité est l'intervalle $]-\infty;-4]\cup]2;+\infty[$. Autrement dit,

$$\frac{x+4}{x-2} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in]-\infty;-4] \cup]2;+\infty[$$

7.3 Etude graphique

7.3.1 Résolution graphique d'inéquations de la forme $f(x) > k$

Dans cette section, nous chercherons à résoudre graphiquement des inéquations de la forme $f(x) > k$ ou $f(x) < k$ pour une fonction f donnée et un réel k prescrit.

Pour résoudre ce genre de problème, il est important de placer sur le graphique la droite horizontale $\mathcal{D}$ d'équation $y = k$ (les points d'intersection de cette droite avec la courbe $\mathcal{C}_f$ sont solutions de l'équation $f(x) = k$).

Proposition 16. *Les solutions de l'inéquation $f(x) > k$ sont les abscisses des points de la courbes $\mathcal{C}_f$ situés au-dessus de la droite $\mathcal{D}$.*

Remarque. 1. Autrement dit, après avoir identifier la partie de la courbe se situant au dessous de la droite $\mathcal{D}$, il ne reste plus qu'à déterminer les antécédents de ces points sur l'axe des abscisses afin d'obtenir un intervalle ou une réunion d'intervalles.

2. La méthode de résolution pour une inéquation de la forme $f(x) < k$ s'effectue de la même manière en considérant les points de la courbe situés en dessous de la droite $\mathcal{D}$.

Exemple 7.3.1. insérer un graphique

7.3.2 Position relative de deux courbes

Nous allons généraliser les résultats précédents en résolvant, de manière graphique, des équations de la forme $g(x) = f(x)$ (ce genre de résolution peut s'effectuer à l'aide de la calculatrice) pour des fonctions f et g données. De manière similaire, nous étudierons des inéquations de la forme $g(x) > f(x)$ ou $f(x) < g(x)$.

Proposition 17. *1. Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersections des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.*

2. Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les abscisses des points de la courbes $\mathcal{C}_f$ situés au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$.

3.

4. Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points de la courbes $\mathcal{C}_f$ situés en-dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Remarque. En particulier, si $\mathcal{C}_g$ est une droite horizontale d'équation $y = k$ nous retrouvons l'étude faite à la section précédente.