Chapitre 6

Produit scalaire, applications géométrique

6.1 Introduction

Bien qu'important en géométrie euclidienne, la notion de produit scalaire apparaît tardivement. Les premières traces de ceci apparaissent dans des travaux, liées à la création de l'ensemble des quaternions, de Hamilton en 1843. Le mathématicien Peano, quant-à lui, le définit à partir d'un calcul d'aire ou de déterminant. Ce ne fut que plus tard encore que les qualités intrinsèques (forme bilinéaire symétrique définie positive) d'un produit scalaire furent identifiées et utilisées comme définition. L'avantage de cette formulation abstraite permet de transposer des résultats géométriques à des espaces abstraits, parfois de dimension infinie (espace de fonction par exemple).

6.2 Définition et expressions d'un produit scalaire

6.2.1 Norme d'un vecteur

Définition 6.2.1. *Si $\overrightarrow{u}$ est obtenu à partir de deux points A et B (i.e. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$) alors la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ correspond à la longueur AB. Ceci se note*

$$\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$$

Lorsque $\|\overrightarrow{u}\| = 1$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ est dit unitaire.

Remarque.

1. L'égalité $\|\overrightarrow{AB}\| = 0$ équivaut à $A = B$.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout vecteur $\overrightarrow{u}$ nous avons $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{u}\|$. Par exemple,

$$\|3\overrightarrow{u}\| = 3\|\overrightarrow{u}\| \quad \text{et} \quad \|-2\overrightarrow{u}\| = 2\|\overrightarrow{u}\|$$

3. Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ alors

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

6.2.2 Définition d'un produit scalaire

A partir de la norme précédente, il est possible de définir un produit scalaire dans le plan : il s'agit d'associer un nombre réel à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ données.

Définition 6.2.2. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire entre ces deux vecteurs est défini par*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \tag{6.2.1}$$

Remarque. 1. Attention $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un nombre réel pas un vecteur.

2. Par convention, lorsque $\vec{u} = \vec{v}$, il est possible d'écrire $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$. Il est toutefois préférable de noter $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ pour éviter les confusions.

3. La définition du produit scalaire montre que si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

4. En particulier, dans un triangle ABC, avec $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ l'expression (6.2.1) devient

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - CB^2\right)$$

La formule (6.2.1) étant un peu lourde, serait très peu utilisée.

6.3 Expression du produit scalaire

Dans certains contextes, il est possible d'obtenir des expressions plus manipulables du produit scalaire.

6.3.1 A l'aide des coordonnées

Proposition 22. *Dans un repère orthonormée, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ alors*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Remarque. 1. En particulier, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$.

2. Si $(O, \vec{i}, \vec{j}$ est une base orthonormée $\big($i.e. $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)\big)$ et $\vec{u} = (x, y)$ un vecteur quelconque, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = x \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{j} = y.$$

Autrement dit, le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ avec les vecteurs composant une base du plan permet de retrouver les coordonnées de celui-ci.

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition en observant, dans un premier temps, que $\|\vec{u}\|^2 = x^2+x^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = (x')^2+(y')^2$. Puis, dans un second temps, que le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$ et par conséquent

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + (x')^2 + 2xx' + y^2 + (y')^2 + 2yy'$$

Il suffit ensuite, en utilisant la définition de $\vec{u} \cdot \vec{v}$, de calculer $\frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$ pour conclure. $\square$

Exemple 6.3.1.
Si $\overrightarrow{u} = (2, -1)$ et $\overrightarrow{v} = (3; 4)$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2 \times 3 - 1 \times 4 = 2$.

6.3.2 A l'aide de la norme et d'un angle orienté

Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, il est possible d'exprimer le produit scalaire en fonction de l'angle orientés $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Proposition 23. *Sous les hypothèses précédentes,* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

Remarque. Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, l'expression précédente se simplifie :

- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.
- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens opposé alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

Dans le cas d'un triangle ABC, nous obtenons la formule suivante

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$$

Démonstration. Sans perdre en généralité (quitte à remplacer $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par $\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ et $\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$), il est possible de supposer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient unitaires (i.e. $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$). Plaçons nous dans un repère orthornormée direct de la forme $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{j})$ et posons $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{u}$ ainsi que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v}$.

Il suffit donc de calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}$ dans le repère orthonormée $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{j})$. Pour cela, nous allons utiliser le théorème précédent. Il nous suffit donc de déterminer les coordonnées de ces vecteurs pour ensuite utiliser l'expression du produit scalaire en fonction des coordonnées. Tout d'abord, puisque $\overrightarrow{OA}$ est l'un des vecteurs de base du repère, nous avons

$$\overrightarrow{OA} = (1, 0)$$

Ensuite, par définition des angles orientés $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ nous avons

$$\overrightarrow{OM} = \left(\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) ; \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})\right) = \left(\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) ; \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\right)$$

puisque $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v}$. Ainsi, d'après le théorème précédent

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + 0 \times \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

Ce qui est le résultat souhaité. □

6.4 Règles de calculs

Etant donnés trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ voici quelques règles de calculs permettant de manipuler plus facilement les produits scalaires entre ces derniers. D'une certaine manière, tout s'effectue comme avec des nombres réels.

Proposition 24. *Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et tous nombres réels a et b, nous avons*

1. *propriété de symétrie :* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.

2. *propriété de linéarité :*

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} \quad \text{et} \quad (a\overrightarrow{u}) \cdot (b\overrightarrow{v}) = (ab) \times \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

Remarque. En particulier, nous avons les conséquences suivantes :

$$(-\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2 \pm 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

Attention, nous rappelons que $\overrightarrow{u}^2$ est une notation pour désigner $\|\overrightarrow{u}\|^2$. Autrement dit, la deuxième conséquence signifie que la norme (au carré) du vecteur $\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}$ s'exprime comme la somme des normes (au carré) des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ plus ou moins le produit scalaire entre ces deux vecteurs.

Exemple 6.4.1. Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs, développons la quantité suivante :

$$\begin{aligned} (3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v})(6\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) &= 18\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} - 12\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} \\ &= 3\|\overrightarrow{u}\|^2 - 14\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} - 2\|\overrightarrow{v}\|^2 \end{aligned}$$

6.5 Produit scalaire et orthogonalité

Géométriquement le produit scalaire à un lien avec la notion d'orthogonalité.

Définition 6.5.1. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. Nous dirons $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux lorsque $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.*

Remarque. Par convention $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tout autre vecteur

Proposition 25 (Orthogonalité et produit scalaire)**.** *Nous avons l'équivalence suivante :*

$$(AB) \perp (CD) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

Démonstration. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$ le résultat est immédiat. Dans le cas contraire, nous avons

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}).$$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont non nuls, il en est de même des normes associées. Ainsi, l'hypothèse $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ entraine que

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

Ceci implique alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux. □

Le procédé de projection orthogonal que nous allons décrire ci-dessus permet de simplifier le calcul d'un produit scalaire entre deux vecteurs.

Définition 6.5.2. *Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan. Dire que les points C' et D' sont les projections orthogonales des points C et D sur la droite (AB) signifie que*

$$(CC') \perp (AB) \quad et \quad (DD') \perp (AB).$$

Remarque. Grâce aux relations d'orthogonalité, nous en déduisons que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

Pour calculer un produit scalaire, il est donc possible de remplacer l'un des deux vecteurs par son projeté orthogonal (sur la droite dirigée par le second vecteur).

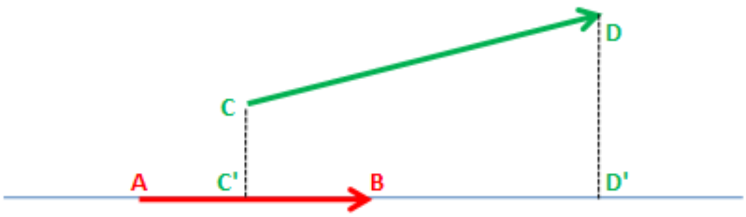

FIGURE 6.1 – Projeté orthogonal

Voici le théorème résultant de l'utilisation des projections orthogonales.

Théorème 26 (Projeté orthogonal)**.** *Soient A, B et C trois points distincts et notons par $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Nous avons deux cas de figures :*

1. *si $0 \leq |\theta| < \frac{\pi}{2}$ alors*
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC}$$
2. *si $\frac{\pi}{2} < |\theta| \leq \pi$ alors*
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Ici, B' désigne la projection orthogonale de B sur la droite (AC).

Démonstration. La démonstration repose sur la décomposition, grâce à la relation de Chasles, suivante :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}$$

qu'il faut combiner avec les règles de calculs de produit scalaire. □

Remarque. Le calcul du produit scalaire s'effectue en deux temps :

1. en effectuant une projection orthogonale adéquate ;
2. en utilisant les facilités de calculs d'un produit scalaire entre deux vecteurs colinéaires.

6.6 Exercices potentiels

- calculs de produit scalaire : exo $9, 10$ page 250, exo $17, 18p251$ exo $27, 29p251$
- calculs d'angles : exo $21, 23page251$

- orthogonalité : exo $24, 25, 26page251$
- Exo $46, 48p253$ exo $57page254$.

6.7 Bilan du chapitre

A COMPLETER :

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, calculer un angle, un longueur dans le plan ou dans l'espace.
- Choisir la formule du produit scalaire la plus adaptée pour résoudre un problème.