Chapitre 5

Nombre dérivé, fonction dérivée

5.1 Introduction

La notion de « dérivée » a mis du temps à être parfaitement saisie par les mathématiciens. Il est possible de trouver des traces de celle-ci dans certains travaux de Fermat en 1636 mais aussi dans ceux de Descartes ou Cavalieri à la même époque. Cependant, les véritables pères fondateurs du calcul infinitésimal (menant à l'obtention de « dérivées ») sont Leibniz et Newton au 17ième siècle. A cette époque, Newton parlait de « fluxion » qu'il définit comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ».

Comme nous allons le voir, une manière d'aborder le « nombre dérivée » se fait par le biais de tangentes à une courbe. L'étude de tels objets fut initié par Pascal dans la première moitié du 17ième siècle.

Ces nouveaux objets mathématiques mettent en jeu des idées « d'infiniment petit » et de « limite » qui sont pas encore bien maitrisées à l'époque et engendrent certains problèmes. Il fallut l'intervention de d'Alembert au 18ième siècle pour définir la « dérivée » comme limite de taux d'accroissement d'une fonction et patienter jusqu'au milieu du 19ième siècle pour que Weierstrass formalise la notion de « dérivée ». Ce nouveau terme, ainsi que sa notation, furent inventé par Lagrange à la fin du 18ième siècle.

5.2 Domaine de définition

Tout d'abord, voici quelques rappels concernant le domaine de définition d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Une des premières questions que l'on doit se poser lorsque l'on étudie une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. est de déterminer l'ensemble de définition : pour quels réels x l'opération $f(x)$ a du sens ? Pour cela, il convient de déterminer les réels aboutissant à une opération illicite afin de les exclure. Par exemple : on ne peut diviser par zéro, il n'est pas non plus possible de calculer la racine carré d'un nombre négatif,...

Exemple 5.2.1. Considérons la fonction suivante :

$$x \mapsto \frac{1}{x-1}$$

Il est alors évident que le dénominateur s'annule lorsque $x = 1$. Hormis cette valeur, tous les autres calculs sont possibles. Le domaine de définition de la fonction est alors $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Si maintenant la fonction est peu plus complexe :

$$x \mapsto \frac{1}{x^2+3x-1},$$

il convient alors de déterminer les racines du polynômes $P(x) = x^2 + 3x - 1$ afin de les exclure.

Si jamais nous considérions la fonction suivante :

$$x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^2+3x-1}},$$

il faudrait établir un tableau de signe pour le polynôme P afin d'exclure les nombres réels tels que $P(x) \leq 0$.

5.3 Dérivabilité et variations

Nous anticipons un peu un chapitre ultérieur en mentionnant l'un des applications majeures de cette année : l'étude des variations d'une fonction via le signe de sa dérivée. Nous allons proposer des exemples simples permettant de mieux saisir cette nouvelle notion, nous fournirons ensuite une définition du nombre dérivée et de la fonction dérivée d'une fonction donnée.

Débutons par un exemple instructif et considérons la fonction

$$f(x) = 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Il est assez simple de tracer son graphe et de constater, visuellement, que la fonction semble croissante au sens suivant.

Définition 5.3.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est croissante si, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Autrement dit, la fonction f préserve l'ordre entre x et y.

Remarque. On dira que f est décroissante, si elle renverse l'ordre entre x et y :

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

Nous sommes à présent en droit de nous interroger : pourquoi la fonction $f(x) - = 2x + 1$ est-elle croissante ? Un court moment de réflexion permet de répondre à cette question : ceci est provient du fait que le coefficient directeur (qui vaut 2 dans notre exemple) est positif. Si jamais nous substituons ce coefficient 2 par -2 nous aurions obtenu une fonction décroissante. Enfin, si ce coefficient directeur était nul la fonction f serait constante (égale à 1).

Ce que nous venons d'observer peut être résumé comme suit : pour une fonction $f(x) = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$, la monotonie de la fonction est déterminée par le signe du coefficient directeur m. Ceci est intéressant mais un peu restrictif : comment étudier des fonctions plus complexes que les fonctions affines ?

Compliquons légèrement et étudions la fonction $x \mapsto x^2$. Il est également facile de tracer son graphe et d'observer le fait suivant : la fonction semble décroitre lorsque x est négatif et la fonction semble être croissante lorsque x est positif avec un minimum en 0. On souhaiterai trouver un critère simple, comme le cas des fonctions affines, permettant de prouver l'observation précédente. Le problème est que nous ne disposons plus de droite mais de parabole et parler de coefficient directeur n'a plus de sens.

En revanche, il est possible de tracer des tangentes le long de la courbe induite par la fonction $x \mapsto x^2$. Bien que nous ne connaissions ni le coefficient directeur, ni l'ordonnée à l'origine, il semblerait que toutes les tangentes aient un coefficient directeur négatif lorsque $x \geq 0$ tandis qu'elles semblent avoir un coefficient directeur positif lorsque $x \leq 0$.

Il se trouve que cette remarque est cruciale est permet de traiter des cas beaucoup plus complexe :

le coefficient directeur des précédentes tangentes s'appelle le nombre dérivé et son signe permet de déterminer la monotonie de la fonction.

De manière un peu plus abstraite, voici ce que nous venons d'observer : à partir d'une fonction f donnée, nous avons (implicitement, de manière graphique) déterminé une nouvelle fonction et le signe de celle-ci nous a permis de savoir si la fonction était croissante ou décroissante (via le coefficient directeur des tangentes). Cette nouvelle fonction porte un nom : il s'agit de la dérivée de la fonction f. Cette fonction correspond à un (petit) taux d'accroissement entre deux points et l'étude de son signe permet de connaitre les variations d'une fonction donnée. Dans ce qui suit il est donc primordial de maîtriser la notion de tableau de signe.

Dans ce qui suit, I désignera un sous ensemble de $\mathbb{R}$ (il s'agira souvent d'un intervalle) sur lequel nos fonctions seront définies.

Définition 5.3.2. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ tel que $a + h \in I$ pour h suffisamment petit. Lorsque la limite suivante existe*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l < \infty$$

on dira que la fonction est dérivable au point a et nous noterons cette limite par $f'(a)$ que nous appélerons nombre dérivée de f au point a.

Remarque. Observons que le rapport

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a}$$

correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points $\big(a; f(a)\big)$ et $\big(a+h; f(a+h\ )\big)$ appartenant à la courbe C_f.

Il est à noter que certaines fonctions ne sont pas dérivables : par exemple $x \mapsto |x|$, n'est pas dérivable en 0.

Malheureusement, cette définition n'est pas très manipulable en pratique et il sera plus commode d'utiliser un formulaire dans lequel les dérivées des fonctions usuelles ont déjà été calculées. En voici quelques unes.

Proposition 18. *Le tableau suivant fournit le domaine de définition ainsi que la dérivée de fonctions usuelles.*

Fonction	*Domaine définition*	*Expression*	*Domaine dérivation*	*Dérivée*
constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
identité	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
carré	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
cube	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
inverse	$\mathbb{R}_*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
racine	$\mathbb{R}_+$	$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Remarque.

1. Plus généralement, il est possible de dériver les fonctions puissances. En effet, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $f(x) = x^n$ alors $D_f = \mathbb{R}$ et $f'(x) = nx^{n-1}$.

2. Ceci est également peut également valable pour les fonctions du type :
$$g\ :\ x \mapsto \frac{1}{x^n} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}_*.$$
En effet, pour $n \in \mathbb{N}_*$ et $x \neq 0$, $\frac{1}{x^n}$ peut s'écrire x^{-n} et ainsi $g'(x) = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$. Le cas $n = 1$ permet de retrouver la dérivée de la fonction inverse :
$$h(x) = \frac{1}{x^1} = x^{-1} \quad \text{et} \quad h'(x) = -1x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$$

3. Bien que cela sorte du programme, ceci fonctionne aussi pour la fonction racine : il suffit s'observer que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ pour $x \geq 0$ et donc, par mimétisme,
$$\big(\sqrt{x}\big)' = \big(x^{\frac{1}{2}}\big)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Démonstration. Démontrons certains de ces résultats.

1. Si f est une fonction constante, i.e. $f(x) = p$ avec $p \in \mathbb{R}$. Nous obtenons alors
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{p-p}{h} = 0 \underset{h \to 0}{\to} 0$$

2. Si f est la fonction carré, i.e. $f(x) = x^2$. Alors

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x + h \underset{h\to 0}{\to} 2x$$

3. Si, nous considérons la fonction inverse, i.e. $f(x) = \frac{1}{x}$. Nous obtenons

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \frac{-h}{(x+h)x} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{(x+h)x} \underset{h\to 0}{\to} \frac{-1}{x^2}$$

4. La démonstration pour les fonctions puissances et racine sont admises. Le cas de la fonction cube est laissé à titre d'exercice.

□

Il est important d'observer que toutes les fonctions ne sont pas dérivables. Voyons ceci au travers de deux exemples.

Exemple 5.3.1. La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en $a = 0$. En effet, si $h > 0$, nous avons

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

tandis que si $h < 0$, nous avons

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Les limites à gauche et à droite (en zéro) étant différentes, nous pouvons avoir l'existence d'un nombre l tel que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = l,$$

la fonction n'est donc pas dérivable en 0 (mais elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.

Exemple 5.3.2. Nous allons montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0. Cette fonction étant définie sur $\mathbb{R}_+$, il suffit de montrer que la limite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h}$$

n'est pas finie. Ceci découle du fait que $\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ (h étant positif) ; il ne reste plus qu'à observer que $\frac{1}{\sqrt{h}}$ devient de plus en plus grand lorsque h se rapproche de 0. Autrement dit,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$$

d'où le résultat. Pour être véritablement rigoureux, il faudrait procéder par l'absurde afin d'utiliser l'observation précédente. Plus précisément, il faudrait supposer qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = l$$

pour ensuite montrer qu'il est possible de choisir h suffisamment proche de zéro tel que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} > l$$

En effet, si h est choisi tel que $0 < h < \frac{1}{(1+l)^2}$ alors (d'après les propriétés de monotonie des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ nous en déduisons que

$$\frac{1}{\sqrt{h}} > l+1 > l$$

A tout ceci s'ajoute plusieurs règles de dérivations permettant de traiter des fonctions plus complexes : si je connais la dérivée de u et la dérivée de u, puis-je en déduire la dérivée de $u+v$? de uv ? de $\frac{u}{v}$ (lorsque v ne s'annule pas) ? Ces règles de dérivations sont essentielles et sont résumées dans la proposition qui suit.

Proposition 19. *Soient u, v deux fonctions dérivables sur I et $a \in \mathbb{R}$.*

1. $\big(au\big)' = au'$.
2. $\big(u+v\big)' = u' + v'$.
3. $\big(uv\big)' = u'v + uv'$.
4. *Si v ne s'annule pas,*
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Remarque. En particulier, lorsque $v = u$, le point 3 nous assure que $(u^2)' = u'u + uu' = 2uu'$. Il est primordial de retenir les faits suivants :

la dérivée d'un produit (resp. quotient) n'est pas le produit (resp. quotient) des dérivées !

Démonstration. Démontrons ces résultats. Le premier point est laissé en exercice, le troisième et dernier points sont admis car les démonstrations nécessitent une notion hors-programme. Traitons, le cas de la dérivée d'une somme :

$$\begin{aligned} \frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h} &= \frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h} \\ &= \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \underset{h\to 0}{\to} u'(x)+v'(x) \end{aligned}$$

puisque les fonctions u et v sont supposées dérivables.

$\square$

Parfois nous avons affaire à des fonctions composées. Par exemple, la fonction $f(x) = \sqrt{2x-3}$ qui est définie lorsque $x \geq \frac{3}{2}$. Ce genre de fonction est de la forme $g(ax+b)$ (dans l'exemple précédent $g(x) = \sqrt{x}$, a= 2 et $b = -3$), la proposition suivante explique comment dériver de telles fonctions.

Proposition 20. *Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, alors la fonction $f : x \mapsto g(ax+b)$ (où $a, b \in \mathbb{R}$) est dérivable et sa dérivée vaut*

$$f'(x) = ag'(ax+b)$$

Exemple 5.3.3. Pour $f(x) = \sqrt{2x-3}$ il faut donc dériver la fonction $g(x) = \sqrt{x}$. Nous trouvons alors

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x-3}} \quad \text{pour tout} \quad x \geq \frac{3}{2}$$

puisque $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

A partir de ces règles, il sera possible de dériver toutes les fonctions que nous rencontrerons durant le cours. L'étude du signe de ces dérivées permettront ensuite de déterminer les variations de la fonction initiale. Nous y reviendrons plus tard durant le cours, nous allons d'abord nous focaliser sur des calculs de dérivation de fonction.

Pour conclure ce chapitre, nous énonçons ci-dessous la formule permettant de déterminer (lorsque cela existe) l'équation de la tangente à une courbe. Fournissant une formule rigoureuse du phénomène que nous avions observé au début de ce chapitre.

Proposition 21. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 \in I$ est alors donnée par*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Remarque. En pratique, l'énoncé de l'exercice fournit la valeur de x_0 et il ne reste plus qu'à déterminer $f'(x_0)$ et $f(x_0)$. A priori, l'équation obtenue doit avoir la forme suivante :

$$y = ax + b$$

avec $a = f'(x_0)$ et $b = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$. Soulignons à nouveau que le nombre dérivée $f'(x_0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente T_{x_0}.

Exemple 5.3.4. Soit $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 5x - 1$.

1. Déterminons l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $x_0 = 2$. Pour cela nous devons déterminer la fonction dérivée. Ici, $f'(x) = 9x^2 - 12x + 5$. Ainsi, $f'(2) = 9 \times 4 - 12 \times 4 + 5 = -7$ et $f(2) = 2 \times 8 - 6 \times 4 + 10 - 1 = 1$. L'équation de la tangente est donc

$$T_2 =:, y = f'(2)(x-2) + f(2) \quad \Longleftrightarrow \quad y = -7(x-2) + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y = -7x + 15$$

2. Est-il possible que C_f admette des tangentes parallèles à la droite d'équation $d : y = 5x - 1$. Pour que cela soit le cas, il faut que les coefficients directeurs coïncident. Nous cherchons donc x_0 tel que

$$f'(x_0) = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad 9x_0^2 - 12x_0 = 0 \quad (3x_0 - 4)x_0 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_0 = 0 \quad \text{ou} \quad x_0 = \frac{4}{3}$$

   Ainsi les tangentes T_0 et $T_{\frac{4}{3}}$ sont parallèles à la droite d. *Remarque : nous aurions aussi pu utiliser Δ pour résoudre l'équation précédente.*

5.4 Exercices potentiels

- Calcul de taux de variations : exo$9, 14p126$.
- Nombre dérivée : exo $17p127$.
- Calculs de dérivées : exo $21, 24p127$
- Exo $43p129$.
- Faire une fiche d'exercices

5.5 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Savoir utiliser les formules de dérivations des fonctions usuelles.
- Savoir dériver des produits, sommes, quotients, composées de fonctions usuelles.
- Savoir calculer l'équation de la tangente à une courbe.
- Montrer qu'une fonction n'est pas dérivable.

5.6 Pour aller plus loin

5.6.1 Modèle dynamique

L'année prochaine vous rencontrerez de nouvelles équations. Dans celles-ci vous n'aurez pas à déterminer un ensemble de nombre réels comme en 1ère S mais vous devrez trouver une fonction vérifiant certaines propriétés. Précisons ceci, en 1ère S vous deviez résoudre des équations de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0,\ (b, c) \in \mathbb{R}^2,$$

cela revenait à trouver tous les nombres réels x vérifiant l'équation précédente. En terminale, on vous demandera de trouver toutes les fonctions f vérifiant certaines conditions. Par exemple, quelles sont les fonctions dont la dérivée est la fonction elle-même :

$$f'(x) = f(x) \quad \text{pour tout}\, x \in \mathbb{R}$$

Il s'agit d'équations dites « différentielles »et vous apprendrez comment les résoudre l'année prochaine. Quoiqu'il en soit, ce genre d'objet permet de modéliser des situations réelles assez intéressantes.

Nous avons vu que la dérivée correspondait à un taux d'accroissement. Si jamais f désigne la population d'une espère, il ne parait donc pas absurde d'imaginer que f' permet de savoir de quelle manière cette population grandie ou diminue.

En 1926, les mathématiciens A. J. Lotka et V. Volterra ont proposé un modèle mathématiques permettant de représenter la dynamique de population d'un couple de proies et de prédateurs (a priori, il s'agissait de lynx et de lièvre des neiges).

Dans ce qui suit nous adopterons les notations suivantes :

- la fonction f désigne la population des proies,
- la fonction g désigne la population des prédateurs,
- $a \in \mathbb{R}$ désigne le taux de reproduction des proies,
- $b \in \mathbb{R}$ désigne le taux de mortalité des proies (lui même est lié à la fréquence des rencontres des proies avec leurs prédateurs),
- $c \in \mathbb{R}$ désigne le taux de reproduction des prédateurs (il dépend du nombre de proies mangées),
- $d \in \mathbb{R}$ désigne le taux de mortalité des prédateurs.

Le modèle est alors le système suivant :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \times \big(a - bg(x)\big) \\ g'(x) = g(x) \times \big(cf(x) - d\big) \end{cases}$$

Bien que d'apparence simple, il n'est pas possible de résoudre explicitement ce système (i.e. trouver une formule explicite pour les fonctions f et g). En revanche, étant données des conditions initiales (population de départ,...), le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure qu'il existe une unique solution à ce problème et il est possible de décrire ces solutions de manière qualitatives (périodicité,...).

5.6.2 Dérivées partielles

Voici quelques mots sur une généralisation de la notion de dérivation. Dans de nombreux domaines, il est souvent nécessaire de considérer des fonctions de plusieurs variables (le temps et l'espace par exemple). Mathématiquement, cela revient à considérer des fonctions de la forme

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

Il est alors tentant de chercher à déterminer les variations de cette fonction par rapport à la variable x ou y. Pour cela, il suffit de s'intéresser à l'un d'entre elles, x par exemple, et de considérer que la seconde variable, y par exemple, est constante. Il est alors possible d'écrire le taux d'accroissement selon la variable x pour obtenir la notion de dérivée partielle : lorsque la limite suivante existe nous la désignerons par $\partial_x f(x,y)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \partial_x f(x,y) \quad y \in \mathbb{R}$$

Voyons plutôt sur un exemple.

Exemple 5.6.1. Posons : $f(x,y) = x + y$, alors

$$\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \frac{x+h+y-(x+y)}{h} = 1 \underset{h\to 0}{\to} = 1.$$

Autrement dit $\partial_x f(x,y) = 1$ et, de manière similaire, nous obtiendrons $\partial_y f(x,y) = 1$

De nombreuses propriétés que nous avons vu dans ce chapitre sont encore vérifiées lorsque la fonction considérée mets en jeu plusieurs variables. A vrai dire, les calculs sont souvent plus longs mais rarement plus compliqués.

Cette notion de dérivée partielles est prépondérante en physique et apparait naturellement dans des équations particulières (appelées équations aux dérivées partielles) permettant de modéliser des phénomènes physiques important. Pour attiser votre curiosité, nous indiquons ci-dessous la forme de telles équations :

- équation de la chaleur : $\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u$,
- équation des ondes : $\partial^2_{tt} u = c^2 \partial^2_{xx} u$ avec $c > 0$,
- équation de Schrödinger (décrivant les déplacements d'une particule en physique quantique) : $i\partial_t u + \Delta u + f = 0$ avec f une fonction donnée. Cette formulation correspond plus à une version mathématicienne de l'équation de Schrödinger et de nombreuses constantes physiques n'y apparaissent pas (notamment la constante de Planck).