Cours de mathématiques en 1ère S $(2018-2019)$

Kevin Tanguy

5 juin 2019

Table des matières

Chapitre 1

Second degré

1.1 Introduction

Définition 1.1.1. *Une fonction polynomiale de degré deux (ou trinôme du second degré) est une fonction de la forme*

$$f\,:\,x \mapsto ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$ *et* $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque. Le domaine de définition de f est l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

Dans ce chapitre nous allons chercher à résoudre des équations, dites du second degré, associées à ce type de fonction. C'est à dire, nous allons résoudre des équations de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \text{ et } (b, c) \in \mathbb{R}^2$$

Nous ferons également le lien entre les solutions de l'équation précédente avec la représentation graphique de la fonction f définie plus haut. Ce genre de considération remonte à l'époque des Babyloniens (8ième siècle avant J.C.) et la résolution des équations du second degré a été débutée par Al-Khwarizmi (dont le nom latinisé fournira le mot « algorithmie ») au 9ième siècle.

Ce genre de fonctions et d'équations apparaissent naturellement dans certains problèmes. Par exemple :

- si nous souhaitions décrire le mouvement effectué par un cycliste (ou skieur, skateboarder, etc) après avoir pris un tremplin,
- si nous cherchions à modéliser l'évolution du nombre de naissance lors d'un « baby boom »,
- enfin, si nous voulions résoudre le problème d'optimisation suivant : étant donné un triangle scalène (quelconque) APB dont le côté AB est de longueur 1, sur lequel nous plaçons un point $M \in [A, B]$ et un point $Q \in [PB]$ de tels sorte que les triangles APM et MQB soient équilatéraux, comment choisir la position du point M pour maximiser l'aire du triangle MPQ ou pour minimiser l'aire du quadrilatère $APQM$?

1.2 Rappels et pré-requis

Pour entamer ce chapitre, certains pré-requis sont nécessaires. Voici une liste, non-exhaustive, de ce qu'il faut savoir maitriser :

1. Connaitre ses identités remarquables.

2. Savoir résoudre des équations de la forme suivante
   - $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$
   - $x^2 - 9 = 0$ ou $x^2 + 2x + 1 = 0$
   - $(3x - 4)(-2x + 5) = 0$ ou encore $2x^2 + 3x = 0$
   - ...
3. De manière similaire, savoir résoudre des inéquations de la forme : $x^2 > 5$, $x^2 < -2 \dots$

1.3 Forme canonique

Ce court préambule étant achevé, nous pouvons entamer le début de chapitre. Nous commençons par la *forme canonique* d'un polynôme du second degré. Comme nous allons le voir par la suite, cette écriture particulière d'un trinôme du second degré permet de résoudre facilement les équations du second degré (sous certaines conditions) mais aussi de déterminer les extremums d'une fonction polynomiale de degré deux. Par la suite, nous désignerons constamment (sauf mention explicite du contraire) par polynôme du second degré, une fonction f de la forme suivante :

$$f \,:\, x \mapsto ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 1 (Forme canonique)**.** *Tout polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme canonique*

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \quad x \in \mathbb{R}$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant du polynôme.

Démonstration. Soit f un polynôme du second degré : *i.e.* $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Puisque a est non nul, il est alors possible d'écrire

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

En imaginant que les termes $x^2 + \frac{b}{a}x$ sont le début d'un identité remarquable

$$(x + \dots)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \dots$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

□

Voici quelques exemples :

Exemple 1.3.1. 1. Si $f(x) = x^2 + x + 1$, nous avons alors

$$f(x) = (x^2 + x) + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

2. Si $f(x) = x^2 - 2x - 15$, nous avons alors

$$f(x) = (x^2 - 2x) - 15 = (x - 1)^2 - 1 - 15 = (x - 1)^2 - 16$$

3. Si $f(x) = x^2 + 2x + 1$, alors

$$f(x) = (x + 1)^2 + 0$$

1.4 Résolution d'équations du second degré

Désignons par (E) l'équation du second degré suivante :

$$(E) : \quad ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \text{ et } (b, c) \in \mathbb{R}^2$$

et notons f la fonction associée.

Définition 1.4.1. *Les solutions de l'équations (E) sont appelées racines de f.*

Remarque. Nous verrons un peu plus tard que celles-ci, lorsqu'elles existent, correspondent géométriquement aux points d'intersections de la courbe C_f (associée au polynôme f) avec l'axe de abscisses.

Nous allons voir que la forme canonique introduite précédemment et le signe du discriminant Δ permettent de savoir s'il existe des racines réelles et d'obtenir une expression de celles-ci.

Proposition 2 (Résolution d'équation d'ordre deux)**.** *Avec les notations précédentes, trois cas de figure se présentent à nous :*

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux racines, réelles, distinctes*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine réelle (dite double)*

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

3. *Enfin, si $\Delta < 0$, l'équation (E) n'admet aucune racine réelle.*

Remarque. Lorsque $\Delta = 0$, cela signifie qu'il était possible d'utiliser une identité remarquable pour résoudre l'équation (E) et qu'il n'était pas utile de calculer le discriminant. En classe de Terminale S, vous verrez qu'il est possible de trouver, avec un peu d'imagination, des solutions (dans un contexte plus large) à l'équation (E) lorsque $\Delta < 0$.

Démonstration. Soit f un polynôme du second degré, rappelons qu'il est possible d'exprimer f sous sa forme canonique :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \text{avec} \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Ainsi, la résolution de l'équation (E) est équivalente à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

1. Supposons, dans un premier temps que $\Delta > 0$. Alors, $\sqrt{\Delta}$ existe et l'équation précédente peut s'écrire comme suit :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

Il est alors possible d'utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ qui nous fournit

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) S s'exprime de la manière suivante :

$$S = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\} = \left\{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

2. Supposons à présent que $\Delta = 0$. En reprenant les calculs précédents, la résolution de l'équation (E) est équivalente à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Il est alors aisé de déterminer l'ensemble des solutions S :

$$S = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\} = \left\{x_0 = \frac{-b}{2a}\right\}$$

3. Enfin, si $\Delta < 0$, l'équation (E) est équivalente à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$

Pour conclure, il suffit d'observer que le membre de droite est strictement négatif (par hypothèse $\Delta < 0$) tandis que le membre de gauche est positif ou nul (il s'agit d'un carré). En conséquence, il ne peut pas exister de solutions réelles (si elles existaient, nous aurions une contradiction).

□

Exemple 1.4.1. Résolvons les équations suivantes à l'aide, si nécessaire, de la proposition précédénte :

1. $x^2 - 2x - 15 = 0$

2. $x^2 + x + 1 = 0$

3. $x^2 + 2x + 1 = 0$.

Exemple 1.4.2. Proposer un algorithme permettant de résoudre une équation du second degré à partir d'un polynôme du second degré donné.

1.5 Signe d'un polynôme du second degré

Le lecteur attentif aura remarquer que la démonstration de la proposition précédente nous permet d'obtenir une forme factorisée du polynôme f lorsque $\Delta \geq 0$. Plus précisément, nous avons le résultat suivant qui nous permet de déterminer le signe d'un polynôme du second degré en fonction du signe de son coefficient dominant (le coefficient apparaissant devant le terme en x^2).

Proposition 3 (Factorisation d'un polynôme du second degré)**.** *Dans le même contexte, nous avons les factorisations suivantes du polynôme f :*

1. *Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec x_1 et x_2 les racines de f.*

2. *Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a(x - x_0)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec x_0 la racine double de f.*

Remarque. Lorsque $\Delta < 0$, il n'est pas possible de factoriser (dans $\mathbb{R}$) le polynôme f.

Lorsque le polynôme est sous forme factorisée, il est alors possible de dresser un tableau de signe.

Corollaire 4. *Sous le contexte précédent, pour tout réel x, nous avons les résultats suivants :*

1. *Lorsque $\Delta > 0$ et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 < x_2$ (par exemple) les deux racines du polynôme, nous avons le tableau de signe suivant :*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		*signe de a*	0	*−signe de a*	0	*signe de a*	

2. *Lorsque* $\Delta = 0$ *et* $f(x) = a(x - x_0)^2$ *avec* x_0 *la racine double de* f*, nous avons*

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	*signe de a*	0	*signe de a*

3. *Lorsque* $\Delta < 0$*, le polynôme* f ne s'annule jamais *et nous avons*

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	*signe de a*

Démonstration. La démonstration de ce résultat repose sur les formes factorisées, du polynôme f, obtenues via la forme canonique et le signe du discriminant. A partir de celles-ci, il est facile de dresser un tableau de signe pour chaque cas de figure.

1. Si $\Delta > 0$, nous avons

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		signe de a	0	$-$signe de a	0	signe de a	

2. Si $\Delta = 0$ nous avons $f(x) = a(x - x_0)^2$. Observons alors que $f(x_0) = 0$ et que $(x - x_0)^2 > 0$ si $x \neq x_0$ pour conclure.

3. Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de factorisation de f permettant de dresser un tableau de signe. Cependant, la forme canonique de f va nous permettre de conclure. En effet, celle ci nous fournit l'expression suivante

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observons alors que $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ (puisque $\Delta < 0$) et $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$. Ce qui nous permet d'en déduire que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$. Ainsi, le signe de f est dicté par celui du coefficient dominant a.

□

Exemple 1.5.1. 1. Déterminons le signe du polynôme $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Résolvons l'inéquation $3x - 4 + \frac{5}{x} < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.6 Représentation graphique d'un polynôme du second degré

Nous allons maintenant présenter des propriétés graphiques de polynômes du second degré. Dans ce qui suit, f désigne encore un polynôme de degré deux dont nous rappelons sa forme canonique :

$$f(x) = a\big[(x - \alpha)^2 + \beta\big], \quad x \in \mathbb{R}$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a^2}$.

Proposition 5 (Variations et extremum)**.** *La courbe représentative de la fonction f, que nous noterons C_f, est une parabole dont l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \alpha$ et dont le sommet S a pour coordonnées $S\big(\alpha; f(\alpha) = \beta\big)$.*

De plus, si $a > 0$, f atteint son minimum au point α (cf. figure) :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

En revanche, si $a < 0$, f atteint alors son maximum en ce même point (cf. figure) :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Démonstration. A partir de la forme canonique et en s'appuyant sur le cours de 2nd, nous remarquons que f est une parabole dont les paramètres sont donnés par les réels (a, α, β). Nous distinguons alors deux cas de figure :

- Si $a > 0$, la fonction $g(x) = a(x - \alpha)^2$ est décroissante pour $x \leq \alpha$ et croissante pour $x \geq \alpha$. De plus, elle admet un minimum en $x = \alpha$. Par conséquent, la fonction f étant une translation de g, f admet les mêmes variations. Le point minimal de sa courbe représentative est donné par $S\big(\alpha, f(\alpha)\big)$.

- Si $a < 0$, la fonction g a des variations opposées au cas précédent. La fonction f admet alors un maximum en $x = \alpha$.

□

Remarque. Lorsque $a > 0$ (resp. $a < 0$), il est coutume de dire que la parabole est orientée vers le bas (resp. vers le haut).

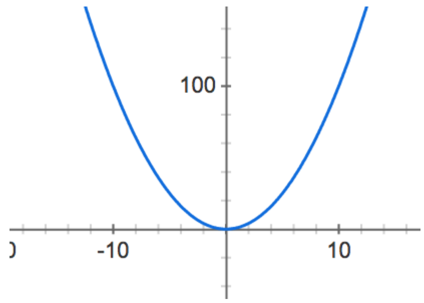


FIGURE 1.1 – $a > 0$

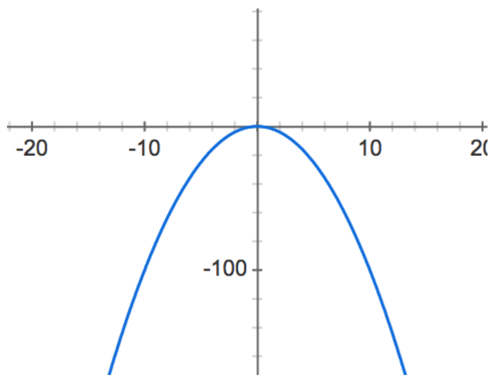


FIGURE 1.2 – $a < 0$

Maintenant que nous avons établi que la courbe représentative d'un polynôme du second degré était une parabole, nous pouvons compléter notre étude en utilisant les tableaux de signe de la section précédente. Géométriquement, nous allons voir que les racines de f correspondent aux points d'intersections entre C_f et l'axe des abscisses.

Proposition 6 (Position par rapport à l'axe des abscisses)**.** *Dans le même contexte que ce qui précède, nous avons à nouveau trois cas de figures :*

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ ayant deux solutions, la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisse x_1 et x_2.*

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation $f(x) = 0$ ayant une solution, la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_0.*

3. *Si $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'ayant aucune solution, la courbe C_f ne rencontre jamais l'axe des abscisses et reste du signe de a.*

Exemple 1.6.1. Voici trois exemples, pour lesquels $a > 0$, illustrant les cas de figures envisageables.

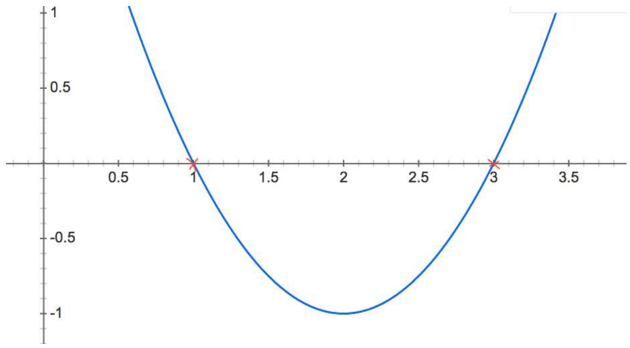


FIGURE 1.3 – $\Delta > 0$: deux racines distinctes en $x = 1$ et $x = 3$

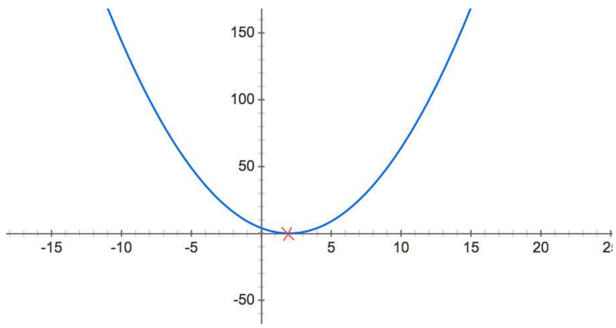


FIGURE 1.4 – $\Delta = 0$: 1 racine (double) en $x = 2$

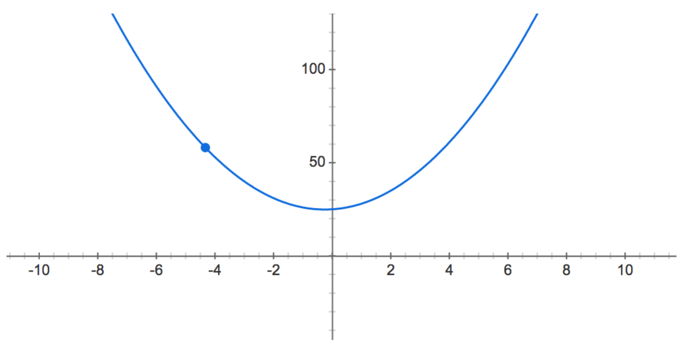


FIGURE 1.5 – $\Delta < 0$: pas de racines réelles

Remarque. Nous retrouvons également de manière graphique, les résultats obtenus sur le signe d'un polynôme du second degré.

1.7 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Recherche des racines d'un polynôme du second degré f (solutions de l'équation $f(x) = 0$).
- Forme canonique, développée et factorisée d'un polynôme de degré 2 f.
- Signe d'un polynôme du second degré f avec résolution d'inéquations.
- Variation d'un polynôme du second degré f et extrema (minimum ou maximum) avec ses coordonnées.
- Représentation graphique complète.
- Position relative de deux courbes du premier et/ou second degré.

En complément, il pourra être demander de mobiliser les connaissances précédentes pour :

- Utiliser un changement de variable pour résoudre une équation de degré supérieur.
- Résoudre des problèmes d'optimisation de distance, d'aire, etc ...

1.8 Challenges

Pour les plus curieux, voici deux problèmes facultatifs (bien évidemment hors programme) donnant des pistes de résolutions d'équations de degré supérieur.

1.8.1 Méthode de Cardan (publiée dans l'Ars Magna en 1545)

Longtemps après les travaux d'Al-Khwarizmi, des mathématiciens italiens se sont penchés sur la résolution d'équation de degré trois. L'un des premiers fut Scipione del Ferro en 1515, suivit de son élève Tartaglia en 1535 et enfin le mathématicien Cardan (1545). Ce genre de recherche pouvait être motiver, entre autres, pour être appliquer à des problèmes de ballistiques. Il est à noter qu'à l'époque ce genre d'exercices n'en était qu'à ses balbutiements et qu'il était prestigieux de découvrir des méthodes de résolutions. La recherche de ce prestige entraina bien sûr des rancoeurs et des querelles quant à la paternité d'une découverte, ce fut notamment le cas entre Tartaglia et Cardan.

Voyons à présent une équation de degré trois :

$$(\tilde{E}) : \quad z^3 - 15z - 4 = 0$$

Voici quelques indications pour déterminer les trois racines réelles de ce polynôme :

- Connaissant les racines x_1 et x_2 du polynôme $f(x) = x^2 + bx + c$, est-il possible d'exprimer les coefficients b et c en fonction de ces racines ?

- Il pourra être utile de chercher les racines de $(\tilde{E})$ sous la forme $z = u + v$ en imposant la condition $u^3v^3 = \frac{15^3}{27}$.

- Tout comme la mathématicien Bombelli (1526-1572), il faudra faire preuve d'un peu d'imagination pour résoudre ce problème quitte à écrire des choses qui semblent fausses (voir même absurdes) dans un premier temps.

1.8.2 Méthode de Ferrari (1522-1565)

Elève de Cardan, ce mathématicien s'est penché sur les équations de degré quatre. Essayons de résoudre l'équation suivante :

$$(\hat{E}) : \quad x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x - 10 = 0$$

Voici quelques indications pour déterminer les deux racines réelles de ce polynôme :

- Procéder à un changement de variable en posant $z = x - 1$ afin d'obtenir une nouvelle équation $(\hat{E}_1)$.

- Soit $y \in \mathbb{R}$ un paramètre à choisir ultérieurement, développer $I = (z^2 + y)^2$ et utiliser l'équation $(\hat{E}_1)$ pour obtenir une expression de I en fonction d'un polynôme de degré deux en z que nous noterons P (attention les coefficients de ce polynôme dépendront de y).

- Chercher un moyen de factoriser ce nouveau polynôme P sous la forme de carré. Il pourra être utile d'observer que la condition permettant cette factorisation s'écrit sous la forme d'une équation de degré trois (d'inconnue y) dont il est possible d'obtenir une racine évidente.

1.8.3 Quelques dernières remarques

Les indications précédentes sont laissées volontairement floues, l'idée derrière cela est d'essayer de vous faire découvrir de quelle manière les mathématiciens (de l'époque mais aussi de nous jours) procèdent lorsqu'ils essaient de résoudre un problème. La solution survient souvent après de longs tâtonnements et de nombreux essais infructueux.

Comme souvent, obtenir une réponse à une question donnée soulève de nouvelles problématiques. A titre d'exemples, voici quelques questions qui pourraient survenir après ces deux challenges :

1. Comment traiter les cas généraux ? De quelle manière serait-il possible de généraliser les méthodes précédentes pour traiter, de manière formelle, les équations de degré trois et quatre comme nous l'avons fait de ce cours pour le degré deux ?

2. Dans le cours, nous avons vu que lorsque $\Delta < 0$ il n'existait pas de racines réelles. Existe-t-il des critères analogues pour les degrés supérieurs.
3. A votre avis, est-il toujours possible de résoudre une équation polynomiale de manière algorithmique (comme nous l'avons fait pour le degré deux en calculant Δ) et ceci peut importe le degré du polynôme considéré ?

Chapitre 2

Vecteurs

2.1 Introduction

La géométrie Euclidienne (enseignée au collège et au lycée) trouve ses sources dans les treize livres composant les *Eléments* en -300 avant *J.C.*. Il s'agit du premier ouvrage connu, écrit par Euclide lui même, proposant un traitement axiomatique et systématique de la géométrie. Dans ce cours, nous allons aborder une vision différentes des géomètres grecs de ces objets. En effet, nous allons nous concentrer sur le calcul vectoriel et le recours aux systèmes de coordonnées. C'est dans son ouvrage *Géométrie* (1637) que Descartes suggère de représenter les objets géométriques par des lettres et de chercher à obtenir des équations liant celles-ci. Pierre de Fermat fut l'un des premiers mathématiciens à utiliser systématiquement un repère orthonormée et des coordonnées pour étudier des droites, paraboles, hyperboles. Ses idées sont présentées dans l'ouvrage *Ad locus planos et solidos isagoge*. A titre d'exemple, les jeux vidéos actuels reposent sur des logiciels de modélisation numérique dont une majeure partie repose sur du calcul vectoriel.

Dans un premier temps, nous allons faire quelques rappels sur les vecteurs. Nous aborderons ensuite la notion de colinéarité, de décomposition d'un vecteur suivant un repère.

2.2 Rappels : généralité sur les vecteurs

Dans ce qui suit, nous considérons le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère (O, I, J) ainsi que A, B, C et D quatres points distincts du plan.

Rappellons les résultats obtenus en classe de seconde.

Proposition 7.

- *[Caractérisation] Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est caractérisé par sa direction, son sens et sa longueur.*
- *[Construction] Pour tout point A et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point M du plan tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}$.*

- *[Relation de Chasles]* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

- *[Coordonnées] Si* A *et* B *ont pour coordonnées respectives* $(x_A; y_A)$ *et* $(x_B; y_B)$ *alors le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *a pour coordonnées* $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

- *[Multiplication] Si* $\overrightarrow{u}$ *a pour coordonnées* $(x_u; y_u)$ *alors, pour tout réel* k*, le vecteur* $k\overrightarrow{u}$ *a pour coordonnées* $(kx_u; ky_u)$.

Exemple 2.2.1. Soient $A(1;2)$, $B(7;4)$ et $C(4;3)$. Alors

1. $\overrightarrow{AB}(6;2)$, $\overrightarrow{AC}(3;1)$ et $\overrightarrow{BC}(3;-1)$.

2. $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $(-6;-2)$ et vérifie $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est désigné comme le vecteur opposé de $\overrightarrow{BA}$./

3. De plus, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ est appelé le vecteur nul.

Rappelons également les propriétés suivantes :

Propriétés 1.

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Le point C est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Remarque. Une autre manière d'exprimer que C est le milieu du segment $[AB]$ est d'avoir l'identité vectorielle $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

2.3 Colinéarité entre deux vecteurs

2.3.1 Définition et conséquences

La notion de parallélisme entre deux droites se retranscrit de manière vectorielle par celle de colinéarité. Voici la définition de cette nouvelle notion.

Définition 2.3.1. *Deux vecteurs non nuls* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires si et seulement si il existe un réel* k *tel que* $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Remarque. Deux vecteurs colinéaires ont donc la même direction (mais pas forcément le même sens). Par convention, le vecteur $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tous les autres vecteurs du plan.

Voici également deux conséquence de cette définition :

1. $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CD}$ si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2. Les points A, B et C du plan (distincts deux à deux) sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2.3.2 Critère de colinéarité

Par la suite nous considérons $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ deux vecteurs dont les coordonnées sont exprimées dans un repère (O,I,J).

Définition 2.3.2. *Le nombre réel $xy'-yx'$ est appelé* déterminant *des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Nous le noterons par*

$$\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx$$

Proposition 8. *Les vecteurs $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ sont colinéaires si et seulement si* $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 0$.

Remarque. Autrement dit, ce critère nous assure que la colinéarité entre deux vecteurs signifie que leurs coordonnées sont proportionelles.

Démonstration. Procédons par équivalence.

1. Supposons que les vecteurs $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ soient colinéaires. Par définition, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$. En conséquent, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ s'expriment en fonction de celle de $\overrightarrow{v}$. C'est-à-dire : $(x,y) = (kx',ky')$. Ainsi,

$$\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = xy' - yx' = kx'y' - ky'x' = k(x'y' - x'y') = 0$$

2. Supposons que l'identité $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = xy' - yx' = 0$ soit vérifiée. Si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur nul, par convention $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires. Maintenant si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, c'est que l'une de ses coordonnées est non nulle. Supposons qu'il s'agisse, par exemple, de la première coordonnée x. Nous pouvons alors utiliser la relation $xy' - yx' = 0$ pour obtenir

$$y' = \frac{x'}{x}y$$

En d'autres termes, $y' = ky$ avec $k = \frac{x'}{x} \in \mathbb{R}$. Ainsi $(x',y') = k(x,y)$ et donc $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$, les vecteurs sont bien colinéaires. Par symétrie, la même démonstration fonctionne *mutatis mutandis* si $x = 0$ et $y \neq 0$.

□

Voici quelques court exemples mettant en jeu le calcul vectoriel et la colinéarité.

Exemple 2.3.1.
1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}(2,5)$ et $\overrightarrow{v}(3,\frac{15}{2})$ sont colinéaires car $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 2 \times \frac{15}{2} - 5 \times 3 = 0$.

2. Dans un repère $(O;I;J)$, considérons les points $A(-4;4)$, $B(5;8)$ $C(-2;0)$ et $D(8;2)$. Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?

3. Dans un repère $(O;I;J)$, considérons un point $M(5;-4)$. Démontrer que ce point appartient à la droite (IJ).

Exercice 1. Proposer un algorithme permettant de savoir si trois points sont alignés.

2.4 Décomposition d'un vecteur

2.4.1 Différents repères du plan

Rappelons les différents repères du plan $(O; I; J)$ rencontrés en classe de 2nd, nous adopterons les notations suivantes par la suite : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$.

Définition 2.4.1. 1. *Tout d'abord, le repère* orthonormé *: cela signifie que les droites (OI) et (OJ) sont orthogonales (perpendiculaires) et que les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont tous les deux de même norme.*

2. *Un repère est dit* orthogonale *si les droites (OI) et (OJ) sont orthogonales sans pour autant que les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ soient forcément de même norme.*

3. *Un repère quelconque nécessite simplement que les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ soient non colinéaires.*

Remarque.

- Choisir un repère consiste donc à choisir un point servant d'origine (ici O) ainsi que deux vecteurs non colinéaires (ici $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$). Un tel repère sera alors noté $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

- Un tel repère étant fixé, dire qu'un point M a pour coordonnées (x, y) signifie que

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$

- Par définition, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{w}$ dans un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ sont celles de l'unique point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{w}$.

2.4.2 Décomposition d'un vecteur

Considérons $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non-colinéaires du plan. Etant donné, un vecteur $\overrightarrow{w}$ du plan, il est toujours possible de décomposer celui-ci suivant les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Plus précisément, nous avons le théorème suivant :

Théorème 9. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan. Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ du plan, il existe un unique couple de réels $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tels que*

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$$

Démonstration. Notons par U (respectivement V) l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{u}$ (respectivement $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{v}$). Similairement, désignons par M l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{w}$.

1. (Existence de la décomposition) Observons que la droite parallèle à (OV) passant par le point M coupe la droite (OU) en un point x et que la a droite parallèle à (OU) passant par le point M coupe la droite (OV) en un point y. Autrement dit, M a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \overrightarrow{j})$.

   De plus, $OxMy$ est un parallélogramme donc

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Ox} + \overrightarrow{Oy}.$$

En outre, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{Ox}$ sont colinéaires : il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{Ox} = a\overrightarrow{u}$. De manière simialre, par colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{Oy}$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{Oy} = b\overrightarrow{v}$. Par conséquent, après substitution, nous obtenons

$$\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$$

2. (Unicité de la décomposition). Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe deux décompositions $(a; b)$ et (a', b') du vecteur $\overrightarrow{w}$ pour aboutir à une contradiction. Autrement dit, nous supposons que les deux égalités suivantes sont satisfaites pour des couples $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a', b') \in \mathbb{R}^2)$:

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{w} = a'\overrightarrow{u} + b'\overrightarrow{v}$$

Ces identités nous permettent d'obtenir alors que $a\overrightarrow{u} - a'\overrightarrow{u} = b'\overrightarrow{v} - b\overrightarrow{v}$. D'où,

$$(a - a')\overrightarrow{u} = (b' - b)\overrightarrow{v}.$$

Si $a \neq a'$ nous en déduisons alors que $\overrightarrow{u} = \frac{b'-b}{a-a'}\overrightarrow{v}$. Autrement dit, $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$. Ceci est absurde au vu de nos hypothèses et donc $a = a'$. Similairement, nous obtenons également $b = b'$ par le même raisonnement.

$\square$

2.4.3 Application

Exemple 2.4.1. Voyons de quelle manière le calcul vectoriel nous permet de faire de la géométrie. Soit AGF un triangle non aplati.

1. Placer les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{GC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GF}$.

2. Démontrer que les points A, B et C sont alignés en utiliser le calcul vectoriel, puis en choisissant un repère du plan adéquat.

2.5 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Manipuler les opérations élémentaires du calculs vectoriels (milieu, relation de Chasles,...)
- Choisir un repère adéquat pour résoudre un exercice à l'aide des coordonnées .
- Maitriser la notion de colinéarité et ses caractéristiques.
- Décomposer un vecteur suivant dans un repère.

2.6 Pour en savoir plus

2.6.1 Quelques remarques sur la géométrie non euclidienne

Au début de ce chapitre nous avons annoncer que nous allions étudier la géométrie euclidienne d'un point de vu vectoriel. Cet énoncé sous-entend qu'il existerait des géométries *non euclidienne.* Que pourraient-elles êtres et quelles seraient les différences avec la géométrie enseigner dans l'enseignement primaire et secondaire ?

Pour mieux comprendre ceci il est utile de revenir aux *Eléments* d'Euclide. Dans son traité, Euclide construit toute la géométrie que nous connaissons (propriétés des triangles équilatéraux, etc,. . .) à l'aide de raisonnements logico-déductif à partir d'une liste de cinq axiomes. Par exemple : « *un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts* »dont la véracité semble tellement évident à nos yeux qu'il ne parait pas déraisonnable de supposer une telle assertion vraie. En revanche, parmi ces axiomes, l'un d'entre eux est un peu particulier : après reformulation, celui-ci s'énonce comme suit

Par un point extérieur à une droite, il passe toujours une parallèle à cette droite, et une seule.

Cette affirmation ressemble étrangement à la conclusion d'un Théorème qui n'aurait pas de démonstration. Cela à intriguer les mathématiciens, notamment Sacherri qui tenta, au 17ème siècle, de manière infructueuse, de proposer une démonstration par l'absurde de cette assertion. En 1813, Gauss écrit : « Pour la théorie des parallèles, nous ne sommes pas plus avancés qu'Euclide, c'est une honte pour les mathématiques ». Il fallu encore un peu de temps aux mathématiciens pour découvrir ces nouvelles géométries.

Une manière, peut-être un peu grossière, de mettre en évidence l'existence de celles-ci est de parler de plus court chemin : si nous dessinons deux points A et B sur une feuille, ils nous semblent évident que le plus court chemin pour aller de l'un à l'autre est la ligne droite. Que se produirait-il si nous placions ses points à la surface de la Terre, l'un à Tokyo et l'autre à Lille par exemple ? Déj), il semble un peu plus délicat de parler de ligne droite à la surface de la Terre . . .

La Terre nous fournit un premier exemple sur lequel il est possible de faire de la géométrie non euclidienne, il s'agit de la géométrie sphérique. En effet, celle-ci propose des différences notoire avec ce que nous connaissons : le Théorème de Pythagore n'est plus vérifié si nous dessinons un triangle sur un ballon ! Il est même possible de dessiner sur ce même ballon un triangle possédant trois angles droits ! Cette géométrie diffère de celle d'Euclide car le ballon est courbé (positivement) tandis que notre feuille de dessin est toute plate.

Il est également possible de parler de courbure négative en faisant de la géométrie hyperbolique. A titre d'exemple, il est facile de décrire celle-ci : il suffit de prendre l'intérieur d'un bol et d'imaginer que des petits êtres vivent à l'intérieur. Du fait de sa courbure, il est beaucoup plus difficile et plus long, pour eux, de se déplacer vers le bord de ce bol tandis qu'il est plus aisé de se promener vers le centre de ce même bol. Ainsi, le plus court chemin entre deux points de ce bol ne correspondrait pas à des lignes droites mais plutôt à des arcs de cercles où les individus chercheraient à se rapprocher, dans un premier temps, du centre avant de s'éloigner à nouveau vers leur destination.

Bien entendu, ces géométries sont plus complexes à enseigner que celle d'Euclide mais elles n'en sont pas moins passionnantes. Voici quelques grands mathématiciens qui ont contribué à faire évoluer (bien longtemps après les découverts d'Euclide) l'étude de géométrie non-euclidienne : Lobatchevski en 1829, Riemann en 1867 ou encore Poincaré en 1902.

Ces géométries peuvent sembler un peu étranges, voir abstraites et n'être que des jeux auxquels se prêtent les mathématiciens. Il n'en est rien ! A titre d'exemple, la géométrie sphérique peut-être utiliser en aviation (pensez au vol Tokyo-Lille), mais le plus frappant est peut-être la découverte de la relativité (en 1905 puis 1915) par Einstein dont les modèles mathématiques « d'espace-temps »reposent sur de la géométrie non euclidienne.

2.6.2 Curiosité en grande dimension

Il n'est pas vraiment possible pour l'être humain de se représenter un objet en quatre dimension (ou plus). Il est cependant possible de conceptualiser ce qui doit se produire. Imaginons que nous surplombions un monde vivant dans une feuille en papier, un monde en deux dimension. Si nous prenions un cube de notre univers, les habitants de ce monde ne pourraient l'apercevoir qu'au moment ou une partie du cube traverse la feuille de papier et pénètre dans leur monde. En faisant ceci, les habitants observeraient une tranche du cube et seraient face à un carré. Il n'est donc pas difficile de généraliser ce procédé en se disant que si des êtres nous observaient depuis un monde en quatre dimension et s'amusaient à vouloir nous montrer un cube de leur univers (en quatre dimensions) nous ne verrions qu'une tranche de celui-ci et ferions face à un cube normal.

Bien que notre intuition soit un peu gênée par des espaces de dimension supérieurs à trois, ces ensembles interviennent très rapidement lors de l'étude de certains problèmes. En effet, grossièrement, ajouter une dimension revient à considérer un paramètre supplémentaire. Par exemple, pour décrire le mouvement d'un oiseau nous avons besoin de connaître sa position dans l'espace. En revanche, il est possible que nous ayons également besoin de connaitre la durée de son mouvement, la pression atmosphérique, la température, etc ... la considération de ceci force à introduire plus de dimensions pour prendre en compte ces nouveaux paramètres. En statistiques, certains problèmes de modélisation comme la météorologie met en jeu plusieurs milliers de paramètres.

L'un des intérêts majeur des coordonnées cartésiennes est que nous pouvons étudier des choses qui dépasse notre imagination. En effet, pour ajouter une dimension il suffit d'ajouter une coordonnée à notre vecteur. Il devient donc possible de faire des calculs sur des choses que nous ne pouvons visualiser. Cela va parfois à l'encontre de notre intuition. Voyons ceci au travers d'un exemple.

Débutons dans le plan et considérons un carré de côté 4 dont le centre est placé en $(0, 0)$. Plaçons des disques de rayon 1 dans les zones suivantes : un premier disque centré au point $(1; 1)$, un deuxième en $(1; -1)$, un autre en $(-1; 1)$ et un dernier en $(-1; -1)$. Il est alors possible de placer un dernier disque en $(0; 0)$ puis de l'agrandir jusqu'à ce qu'il touche les quatre disques que nous avons disposer. dans le carré au préalable.

Bien sûr, il est possible de procéder de manière similaire dans l'espace. Cette fois-ci nous avons un cube de côté 4, 8 boules de rayon 1 centrées aux points $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$ et enfin une dernière boule placée en $(0; 0; 0$ dont le rayon est plus grand possible (avec pour condition que cette nouvelle boule ne puisse empiéter sur les autres).

A vrai dire, pourquoi s'arrêter en si bon chemin ? Il n'est plus possible de faire de dessin mais nous pouvons imaginer un hypercube de côté 4 (que nous noterions $[-2; 2]^d$) en dimension d et placer des boules aux points $(\pm 1; \ldots, \pm 1)$ comme auparavant pour enfin placer une dernière boule au centre avec les mêmes restrictions qu'auparavant.

A partir de quelle dimension cette dernière boule dépasse du cube $[-2; 2]^d$?

De manière intuitive, nous serions tenter de répondre : jamais ! Voyons ce que nous disent les calculs. Nous avons vu que la distance d'un point $M = (x_1; x_2)$ à l'origine valait

$$d(O, M) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

En dimension d, il s'agit de la même formule. C'est-à-dire, si M a pour coordonnées $(x_1; x_2; \ldots, x_d)$ (il n'est plus vraiment possible de parler d'abscisses ou d'ordonnées, nous numérotons donc les coordonnées par des nombres $x_1, \ldots, x_d$) nous avons la formule suivante :

$$d(O, M) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2}$$

Or, dans le problème que nous considérons les points M, centres des boules, ont des coordonnées de la forme $(\pm 1; \ldots; \pm 1$ donc $d(O, M) = \sqrt{d}$. Ainsi, puisque ces boules sont de rayon 1, cela entraine que le plus grand rayon possible pour la boule centrale vaut $\sqrt{d} - 1$. En conséquence, la boule centrale déborde du cube si

$$\sqrt{d} - 1 > 2 \quad \Longleftrightarrow \quad d > 9$$

ce qui n'était pas du tout intuitif. En fait, il est même possible de préciser ce résultat. Il s'agit d'un domaine des mathématiques qui s'appelle *la concentration de la mesure*. L'un des résultats de cette théorie permet d'affirmer que le volume de la boule centrale restant dans le cube s'approche très vite (exponentiellement vite) de zéro lorsque la dimension devient de plus en plus grande.

2.6.3 Distance

La distance que nous venons de voir s'appelle la distance euclidienne. Il existe d'autre façon de mesurer la distance entre deux points, l'une d'elle s'appelle la distance de « Manhattan » (en rapport avec le quartier de New-York). La raison derrière cette terminologie est la suivante : la plupart des villes américaines sont construites sur la forme d'un quadrillage. Ainsi, pour rejoindre un point A à un point B de la ville, nous sommes forcés de suivre ce quadrillage et d'arpenter les côtés des carrés de ce quadrillage. Ainsi, la distance calculée correspond à celle qui est effectivement parcouru à pied plutôt que celle obtenue « à vol d'oiseau ».

Formellement, si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors

$$AB = |x_A - x_B + |y_A - y_B|$$

où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue d'un nombre réel. Cette formulation n'engendre que très peu de différences notables avec la géométrie classique (grossièrement tout diffère d'une constante multiplicative universelle). En revanche, certain objets bien connu sont un peu modifiés. Pour voir cela nous devons adopter quelques notations : $d_2(A,B)$ pour désigner la distance euclidienne (celle vu en cours) entre deux points et par $d_1(A,B)$ pour la distance de Manhattan. Avec ces notations, il est possible de définir un disque de centre A et de rayon $r > 0$ comme étant l'ensemble des points M vérifiant :

$$d_2(A,M) \leq r$$

et nous obtiendrons la figure classique que vous avez pu rencontré au collège. En revanche, si nous remplaçons d_2 par d_1 dans le formule précédente, notre cercle prendra alors la forme d'un carré !

Il existe d'innombrables distances en mathématiques, chacune ayant une utilité, les quelques mots précédents ne font qu'effleurer la surface de cette notion.

Chapitre 3

Suites numériques

3.1 Introduction

Les suites numériques sont des objets mathématiques qui apparurent naturellement au cours de l'Histoire. Par exemple, en considérant le fait de consigner les résultats d'une expérience (la hauteur d'une plante, le nombre d'insecte dans une fourmilière,...) : la valeur de u_0 correspondrait alors aux données initiales, la valeur de u_1 celles du jour suivant et ainsi de suite.

Cette façon d'indexer des données est présent dans l'Histoire depuis très longtemps. Il est possible de trouver des traces de ceci chez Archimède (287/212 avant *J.C.*) ou encore au 1er siècle après *J.C.* avec la méthode d'Héron d'Alexandrie (servant à extraire une racine carrée). L'étude des suites numériques préoccupa, beaucoup plus tard, à nouveau les mathématiciens au 17ème siècle avec la méthode des indivisibles de Cavalieri permettant de calculer simplement des aires ou des volumes. Cette branche des mathématiques est présentée dans l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert en 1751 et son étude est poursuivie par d'éminents mathématiciens (Newton, Lagrange, Bernoulli,...) de l'époque. Elle intervient également de nous jours en analyse numérique et apparait dans certains procédés de modélisation par ordinateurs.

3.2 Définition

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, une suite numérique consiste numéroter un ensemble de valeurs à l'aide des entiers naturels. Par exemple, la liste de réels $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$ se numéroterait de la manière suivante :

$$u_0 = 0,\ , u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2,\ u_4 = 3,\ u - 5 = 5,\ u_6 = 8,\ u_7 = 13$$

u_0 correspond au premier terme de la suite, u_1 au deuxième terme de la suite et ainsi de suite. Plus formellement, cela revient à considérer une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Définition 3.2.1. *Une suite est une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, c'est à dire*

$$\begin{array}{cccc} u & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & & n & \mapsto & u(n) \end{array}$$

Pour alléger les notations, nous noterons $u(n)$ par u_n. Cette valeur est appelée terme de rang n de la suite*.*

Remarque. Comme nous allons le voir par la suite, ce type particulier de fonctions est beaucoup plus simple à étudier puisque nous ne considérons que les valeurs prises par la fonction sur les entiers plutôt que sur l'ensemble des réels (nous considérons $u(n)$, $n \in \mathbb{N}$ plutôt que $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$).

Au niveau des notations : nous désignerons une suite (l'ensemble de ses valeurs) par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Naturellement, le terme précédent u_n est u_{n-1} et le terme suivant u_{n+1}.

Voyons à présent de quelle manière il est possible de définir une suite.

3.2.1 Formule explicite

Il y a plusieurs façons de créer une suite, la première consiste à donner une formule explicite, c'est-à-dire $u_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ pour une fonction f donnée. Cette façon de faire permet de calculer facilement la valeur de n'importe quel terme souhaité.

Exemple 3.2.1.

1. Si $f : x \mapsto \sqrt{x-7}$ nous avons alors $u_n = f(n)$, $n \geq 7$ et les premières termes de cette suite sont alors $u_7 = 0$, $u_8 = 1$, $u_9 = \sqrt{2}, \ldots$.
2. Si $v_n = (-1)^n$, $n \geq 0$ alors $v_0 = 1$, $v_{2011} = -1, \ldots$.
3. Si $w_n = \frac{4}{n+1}$, $n \geq 0$ alors $w_0 = 4$, $w_1 = 2$, $w_2 = \frac{4}{3}, \ldots$.

Remarque. Il n'est pas obligatoire qu'une suite débute au rang $n = 0$. Comme nous pouvons le constater avec l'exemple précédent, les termes $u_0, \ldots, u_6$ n'existe pas car la fonction f n'est pas définie en ces points.

Représentation graphique

Lorsqu'un suite est définie à l'aide d'une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, c'est à dire $u_n = f(n)$, $n \geq 0$, sa représentation graphique consiste à placer dans un repère orthonormée les points $A_0(0, u_0)$, $A_1(1, u_1)$, $A_2(2, u_2), \ldots$.

Exemple 3.2.2. Placer sur un graphique les quatre premiers termes de la suite $u_n = \frac{6}{n+2}$, $n \geq 0$. Même question avec la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ définie par $t_n = n(4-n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Voyons une autre façon de faire.

3.2.2 Formulation par récurrence

Une autre manière de procéder est de définir une suite par récurrence. Cela consiste à calculer un terme de la suite au fur et à mesure à partir du terme précédent.

Définition 3.2.2. *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ peut être définie à l'aide*

- *d'une valeur initiale, ici $u_0 \in \mathbb{R}$*

- *d'une relation exprimant u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n.*

Exemple 3.2.3. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$, $n \geq 1$. Nous pouvons alors calculer un par un les termes de la suite :

$$u_1 = 3 \times u_0 - 2 = 3 \times 5 - 2 = 13 \quad \text{puis} \quad u_2 = 3 \times u_1 - 2 = 3 \times 13 - 2 = 37 \quad \text{etc}$$

Remarque. 1. L'inconvénient majeur de ceci est la nécessité de devoir calculer tous les termes précédents celui d'intérêt.

2. En considérent $g(x) = 2x - 2$ la suite définie ci-dessus peut s'écrire $u_{n+1} = g(u_n)$, $n \geq 1$ et $u_0 = 5$.

Représentation graphique

La représentation graphique d'une suite définie par récurrence se fait en deux temps. Il faut tracer le graphe de la fonction $f : x \mapsto x$ ainsi que celui de la fonction g utilisée pour définir la suite. Voyons comment faire à l'aide d'un exemple.

Exemple 3.2.4. Soit g la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x+1}$ et (C_g) sa courbe représentative. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = g(u_n) = \sqrt{u_n + 1} \quad n \geq 1, \\ u_0 = -0,8. \end{cases}$$

Pour obtenir une réprésentation graphique de cette suite, il faut suivre la méthode décrite ci-dessous.

1. Tracer (C_g) et la droite d'équation $y = x$ sur $[1; 4]$ dans un repère orthonormé (unité 5 cm) et u_0 sur l'axe des abscisses.

2. Utiliser la courbe (C_g) pour obtenir le terme u_1 à partir de u_0, puis la droite $y = x$ pour reporter la valeur obtenue de $u1$ sur l'axe des abscisses.

3. Recommencer l'étape précédente pour obtenir les termes suivants.

Exercice 2. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} v_{n+1} = 2v_n - 1,\ n \geq 1 \\ v_0 = 2. \end{cases}$$

3.3 Suites usuelles

Dans cette section nous allons présenter la définition de certaines suites usuelles.

3.3.1 Suites arithmétiques

Il s'agit probablement d'une des suites les plus simples à étudier : elles se définissent par récurrence et l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant systématiquement le même nombre réel r. Formellement voici la définition des suites arithmétiques.

Définition 3.3.1. *Une suite arithmétique est définie par le relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \quad n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Le réel r est appelé la raison de la suite.

Exemple 3.3.1. 1. La suite $u_0 = 1$, $u_1 = 6$, $u_2 = 11$, $u_3 = 16, \ldots$ est arithmétique de raison 5.

2. La suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 3 \quad n \geq 0, \\ u_0 = 10 \end{cases}$$

est arithmétique de raison -3.

3. La suite des entiers naturels impairs est arithmétique de raison 2.

Remarque. Remarquons le fait suivant : une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique si et seulement si la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante (et ne dépend pas de n) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, la constante obtenue est la raison de la suite.

Exemple 3.3.2. 1. Considérons la suite définie par $u_n = 3n - 2$ et montrons qu'il s'agit d'une suite arithmétique de raison 3. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n =& 3(n+1) - 2 - (3n - 2) \\ =& 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3. \end{aligned}$$

Nous avons donc bien montré que la suite est arithmétique de raison 3.

2. Il est important d'avoir à l'esprit que de nombreuses suites ne sont pas arithmétique. Cela consiste à observer que la différence entre u_{n+1} et u_n n'est pas constante et dépend de n. Par exemple, étudions la suite définie par $v_n = n^2$, $n \geq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n =& (n+1)^2 - n^2 \\ =& 2n + 1 \end{aligned}$$

Cette suite n'est donc pas arithmétique.

Le résultat suivant montre qu'il est possible d'exprimer une suite arithmétique en fonction de n plutôt que par une relation de récurrence.

Proposition 10. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, alors*

$$u_n = u_0 + nr \quad n \geq 0$$

Remarque. La réciproque est vraie. Il est parfois utile d'utiliser la formule suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

Démonstration. La démonstration se fait de proche en proche : en exprimant u_n en fonction du terme qui le précède, puis en exprimant u_{n-1} en fonction de u_{n-2}. Le résultat s'ensuit en cumulant ces différentes égalités. □

Exemple 3.3.3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 7$. D'après la proposition précédente, nous avons l'expression suivante

$$u_n = 7 - 2n, \quad n \geq 0.$$

Notons que cette expression permet de calculer plus facilement la valeur de $u_{50} = 7 - 2 \times 50$ sans avoir à calculer les termes précédents $u_1, \ldots, u_{49}$ à l'aide de la relation de récurrence.

3.3.2 Suites géométriques

Voici un autre exemple de suite usuelle, cette fois-ci le terme suivant est obtenu en multipliant systématiquement le terme précédent par le même nombre réel q. Autrement dit :

Définition 3.3.2. *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ si*

$$u_{n+1} = q \times u_n, \quad n \geq 0$$

Exemple 3.3.4.

1. la suite $u_1 = 2$, $u_2 = 2$, $u_3 = 4$, $u_4 = 8, \ldots$ est géométrique de raison 2.

2. la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n & n \geq 0, \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

   est arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$.

3. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est géométrique de raison -1.

Remarque. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique si et seulement si le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant pour tout entier n. Dans ce cas, la constante obtenue est la raison q de la suite.

Exemple 3.3.5. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 5 \times 3^{n+2}$. Il est évident que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+3}}{5 \times 3^{n+2}} = 3.$$

Nous avons donc montré que la suite est géométrique de raison 3.

Similairement au cas des suites arithmétiques, il est possible d'obtenir une expression en fonction de n d'une suite géométrique. Plus précisément,

Proposition 11. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, alors l'expression suivante est satisfaite*

$$u_n = u_0 \times q^n, \quad n \geq 0.$$

Remarque. La réciproque est vraie. De plus, il peut-être utile d'avoir en tête la formule suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Démonstration. Même type de démonstration que pour le suites arithmétiques. □

3.3.3 Expression des sommes partielles

Il sera parfois utile d'avoir une formule permettant de calculer la sommes des n premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique $(u_n)_{n\geq 0}$. Formellement, nous souhaitons une formule pour

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \quad ?$$

Remarque. Le symbole $\sum$ est un moyen d'alléger les notations en écrivant de manière condensée une somme. L'indice de sommation dans l'exemple précédent est k et celui-ci débute à 0 et se termine à n, nous fournissant donc la somme de tous les termes u_k (qui apparait derrière le symbole $\sum$) se trouvant entre $k = 0$ et $k = n$.

Proposition 12. *La formule suivante est satisfaite :*

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Remarque. Une légende raconte que la démonstration de ce résultat avait été trouvé, de manière pragmatique, par Gauss à l'âge de 8 ans.

Démonstration. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$ et posons l'addition de $S_n = 1 + \ldots + n$ avec la même somme dans laquelle nous avons inversé l'ordre des termes (i.e. $S_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$). Ceci nous fournit n paquets de $(n+1)$. Autrement dit,

$$2S_n = n(n+1)$$

d'où le résultat. □

En conséquence, cette proposition permet de calculer la somme des $(n+1)$ termes d'une suite géométrique.

Corollaire 13 (Somme de termes d'une suite arithmétique)**.** *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite arithmétique de raison* $r \in \mathbb{R}$ *alors*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + r \times \frac{n(n+1)}{2}$$

Voici une proposition similaire servant pour les suites géométriques.

Proposition 14 (Somme de termes d'une suite géométrique)**.** *Soit* $q \in \mathbb{R}$*.*

1. *Si* $q \neq 1$ *alors* $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2. *Si* $q = 1$ *alors* $S_n = n + 1$.

Démonstration. La deuxième assertion est triviale. Démontrons la première. Observons que $qS_n = q + q^2 + \ldots + q^{n+1}$. Ainsi, nous en déduisons que

$$S_n - qS_n = 1 + q + q^2 + \dots q^n - (q + q^2 + \ldots + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}$$

Autrement dit, $(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$ d'où la conclusion puisque, par hypothèse, $1 - q \neq 0$. □

3.4 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Savoir calculer et représenter graphiquement les termes d'une suite à partir d'une formule explicite ou d'une définition pas récurrence.

- Identifier et démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique (ou ni l'une ni l'autre).

- Savoir utiliser de manière adéquate les différentes formules de représentation d'une suite arithmétique ou géométrique.

- Maitriser les résultats portant sur les différentes formules de sommes partielles.

3.5 Pour aller plus loin

3.5.1 Nombre d'or, suite de Fibonnaci, pavage de Penrose

Historiquement, il semblerait que le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ait été initialement défini l'unique rapport $\frac{a}{b}$ entre deux longueurs a et b telles

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Le nombre d'or peut aussi être obtenu comme étant une racine de l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0$$

La suite de Fibonacci permet de décrire, de manière grossière, la croissance de population de lapins. Cette suite doit son nom au mathématicien italien Fibonacci ($1175 - 1250$). La définition de celle-ci est faite par récurrence et porte exprime le terme u_{n+2} en fonction des deux termes qui le précèdent (nécessitant ainsi la donnée des deux premiers termes).

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad n \geq 2, \\ u_0 = 1,\ u_1 = 1. \end{cases}$$

Cette suite est notamment célèbre dans la culture populaire au travers, entre autres, du roman *Da Vinci Code* de D. Brown mais aussi par son apparition dans le tableau *Parade de cirque*, peint en $1887 - 1888$, de G. Seurat. Cette suite entretient également des liens avec le célèbre nombre d'or ϕ. En effet, il est possible de montrer que le quotient de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci se rapproche de plus en plus du nombre d'or à mesure que n se rapproche de l'infini.

Le nombre d'or est également utilisé dans la construction de pavage de Penrose.

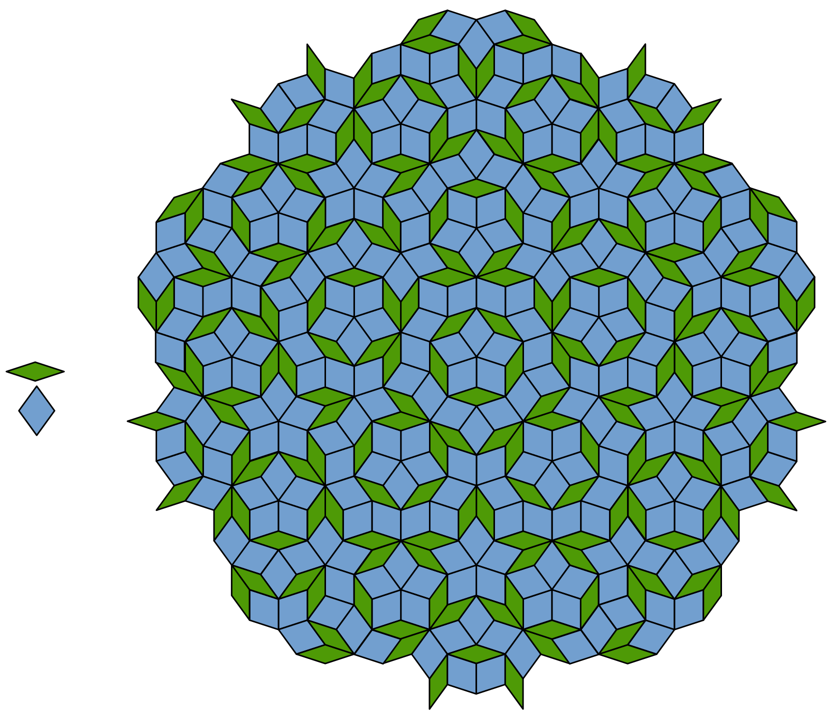


FIGURE 3.1 – Pavage de Penrose

Ces pavages du plan découverts par le mathématicien et physicien britannique Roger Penrose dans les années 1970. En 1984, ils ont été utilisés comme un modèle intéressant de la structure des quasi-cristaux (il s'agit de solides dont le spectre de diffraction est essentiellement discret et dont l'arrangement des atomes n'est pas périodique). La construction de tels objets mathématiques s'obtient grâce à des suites définies par récurrence.

3.5.2 Conjecture de Syracuse

Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie, par récurrence à partir d'un entier $u_0 \in \mathbb{N}$, de la manière suivante

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si} \quad u_n \quad \text{est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si} \quad u_n \quad \text{est impair} \end{cases}$$

Exemple 3.5.1. Si $u_0 = 14$, nous obtenons la suite des nombres :

$$14,\ 7,\ 22,\ 11,\ 34,\ 17,\ 52,\ 26,\ 13,\ 40,\ 20,\ 10,\ 5,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ 4,\ 2,\ 1,\ldots$$

Remarque. La suite de nombre $1, 4, 2, 1, 4, 2, \ldots$ se répète indéfiniment, il usuel de désigner ceci sous le nom de « cycle trivial ».

La conjecture de Syracuse, ou conjecture d'Ulam, est l'hypothèse mathématique selon laquelle la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint 1. Autrement dit, peut-importe la valeur de départ, à partir d'un certain rang, la suite atteint le cycle trivial $1,\ 4\,2\,1,\ldots$.

En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture défie depuis de nombreuses années (au moins depuis 1928) les mathématiciens. D'ailleurs, le mathématicien Paul Erdös (1931 – 1996) a dit à propos de la conjecture de Syracuse : « les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes ».

Chapitre 4

Equation cartésienne d'une droite et vecteur directeur

Dans ce chapitre nous poursuivons notre étude du calcul vectoriel. A nouveau, dans ce qui suit, nous munirons le plan d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, les coordonnées des points que nous allons considérer par la suite seront exprimées dans ce repère.

4.1 Rappels

Voici de brefs rappels concernant les droites dans le plan.

Proposition 15. *Soit (d) une droite du plan.*

- *Si (d) n'est pas parallèle à l'axe (Oy) alors (d) a une équation de la forme $y = mx + p$ où $m \in \mathbb{R}$ est le coefficient directeur de la droite et $p \in \mathbb{R}$ est l'ordonnée à l'origine.*

- *Si (d) est parallèle à l'axe (Oy) alors (d) a une équation de la forme $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.*

Les deux représentations précédentes sont appelées équations réduites de droites*.*

Remarque. Notons que le premier cas de figure correspond à la représentation graphique de polynôme de degré (i.e. $f(x) = mx + b$).

Il est assez simple de déterminer le paramètre p, pour cela il suffit de déterminer la valeur de l'ordonnée du point d'abscisse 0 appartenant à la droite (d). Pour déterminer le coefficient m, il suffit de considérer deux points $A(x_A; y_a) \in (d)$ et $B(x_b; y_b) \in (d)$ et d'évaluer le rapport $\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$. En effet, ce taux d'accroissement donne la valeur du paramètre m.

Enfin, deux droites sont parallèles si elles admettent le même coefficient directeur.

4.2 Equation cartésienne d'une droite

Définition 4.2.1. *Toute équation de la forme (E) : $\quad ax + by + c = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, est appelée équation cartésienne.*

Comme nous allons le voir, les équations cartésiennes englobent les deux cas de figures de la Proposition 15.

Proposition 16. *A toute droite (d) il est possible d'associer une équation cartésienne où le couple $(a, b) \neq (0, 0)$ et réciproquement.*

Démonstration.

1. Considérons une équation cartésienne (E) pour laquelle $(a, b) \neq (0, 0)$.
   - Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et l'équation (E) s'écrit $x = -\frac{c}{a}$ ce qui correspond bien à une équation de droite de la forme $x = k$ avec $k = -\frac{c}{a} \in \mathbb{R}$.
   - Si $b \neq 0$, alors l'équation (E) s'écrit $y = \frac{1}{b}(-ax - c) = -\frac{a}{b} - \frac{c}{b}$ ce qui correspond à une équation de droite de la forme $y = mx + p$ avec $m = -\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ et $p = -\frac{c}{b} \in \mathbb{R}$.
2. Réciproquement, considérons une droite (d) du plan. D'après la Proposition 15 (rappels de seconde), deux cas de figures s'offrent à nous.
   - Si (d) a pour équation $x = k$, $k \in \mathbb{R}$, alors elle admet pour équation cartésienne $x - k = 0$ correspondant aux paramètres $(a, b, c) = (1, 0, -k)$.
   - Si (d) a pour équation $y = mx + p$, $(m, p) \in \mathbb{R}^2$, alors elle admet pour équation cartésienne $-mx + y - p = 0$ ce qui correspond au triplet $(a, b, c) = (-m, 1, -p)$.

□

Remarque. Une droite (d) peut admettre plusieurs représentations cartésiennes.

4.3 Vecteur directeur

Le lien entre droites et calcul vectoriel s'effectue via la notion de vecteur directeur.

Définition 4.3.1. *Un vecteur directeur d'une droite (d) est un vecteur dont la direction est parallèle à celle de (d).*

Remarque. En particulier, pour tout couple (A, B) de points appartenant à la droite (d), le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette même droite. Aussi, si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (d) alors $k\overrightarrow{u}$ avec $k \in \mathbb{R}_*$ l'est également.

Voyons à présent de quelle manière il est possible d'obtenir un vecteur directeur à partir d'une équation cartésienne de droite.

Proposition 17. *Soit (d) une droite du plan.*

- *Si (d) a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, alors $\overrightarrow{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (d).*
- *Si (d) a pour équation $y = mx + p$, avec $(m, p) \in \mathbb{R}^2$, alors $\overrightarrow{u}(1; m)$ est un vecteur directeur de (d).*
- *Si (d) a pour équation $x = k$, alors $\overrightarrow{u}(0; 1)$ est un vecteur directeur de (d).*

Démonstration. Traitons le premier cas de figure. Soit (d) une droite admettant pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ ainsi que $A(x_a; y_a) \in (d)$ et $M(x; y) \in (d)$ deux points de cette droite. Le vecteur $\overrightarrow{AM}(x - x_a; y - y_a)$ est un vecteur directeur de la droite (d). Vérifions que ce vecteur est bien colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u} = (-b; a)$. Pour cela calculons le déterminant entre $\overrightarrow{u}$ $\overrightarrow{AM}$ et utilisons le fait que les coordonnées des points M et A satisfont l'équation cartésienne de (d).

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = (x - x_a) \times a - (y - y_a) \times (-b) = ax + by - ax_a - b_y a = c - c = 0$$

Donc les vecteurs sont bien colinéaire et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (d). □

La proposition suivante nous affirme qu'une droite (d) peut être caractérisée par la donnée d'un point $A \in (d)$ et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

Proposition 18. *Soient (d) une droite, $A \in (d)$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de cette droite. Nous avons la caractérisation suivante des points M appartenant à la droite (d).*

$$M \in (d) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{u} \quad \textit{et} \quad \overrightarrow{AM} \quad \textit{sont colinéaires.}$$

Enfin, voici une condition de parallélisme entre deux droites à partir de leurs vecteurs directeurs.

Proposition 19 (Condition de parallèlisme)**.** *Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.*

Remarque. Cette condition peut se vérifier à l'aide du déterminant.

Pour conclure ce chapitre, traitons un dernier exemple

Exemple 4.3.1. Dans un repère, déterminons une équation cartésienne des droites suivantes :

1. (d) passant par le point $A(-1; 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(3; 2)$.

2. (d') passant par les points $B(2; 3)$ et $C(-3; 5)$.

Présentons deux manières de répondre à la première question.

1. Puisque $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (d), cela signifie que cette droite admet une équation cartésienne de la forme (E) : $2x-3y+c = 0$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$. De plus, le point $A \in (d)$ dont ses coordonnées vérifient l'équation (E). Autrement dit, $2 \times (-1) - 3 \times (-3) + c = 0$ d'où $c = 5$.

2. Considérons un point générique $M(x; y) \in (d)$. Nous savons alors que le vecteur $\overrightarrow{AM}(x+1; y-1)$ est colinéaire au vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Ainsi, leur déterminant est nul :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2(x + 1) - 3(y - 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x - 3y + 5 = 0$$

Traitons à présent la deuxième question. Puisque B et C appartiennent à la droite (d'), $\overrightarrow{BC}(-5, 2)$ est un vecteur directeur de (d'). C'est pourquoi (d') admet pour équation cartésienne

$$(E') : \quad 2x + 5y + c = 0 \quad c \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la valeur de c, il suffit d'utiliser le fait que les coordonnées du point B (ou C) vérifie l'équation (E'). Nous obtenons ainsi $c = -19$.

4.4 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Utiliser la notion de vecteur directeur et de colinéarité pour déterminer des équations cartésiennes de droites.
- Déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un vecteur directeur et un point de cette droite.

- Déterminer un vecteur directeur d'une droite définie par une équation cartésienne.

Chapitre 5

Nombre dérivé, fonction dérivée

5.1 Introduction

La notion de « dérivée » a mis du temps à être parfaitement saisie par les mathématiciens. Il est possible de trouver des traces de celle-ci dans certains travaux de Fermat en 1636 mais aussi dans ceux de Descartes ou Cavalieri à la même époque. Cependant, les véritables pères fondateurs du calcul infinitésimal (menant à l'obtention de « dérivées ») sont Leibniz et Newton au 17ième siècle. A cette époque, Newton parlait de « fluxion » qu'il définit comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ».

Comme nous allons le voir, une manière d'aborder le « nombre dérivée » se fait par le biais de tangentes à une courbe. L'étude de tels objets fut initié par Pascal dans la première moitié du 17ième siècle.

Ces nouveaux objets mathématiques mettent en jeu des idées « d'infiniment petit » et de « limite » qui sont pas encore bien maitrisées à l'époque et engendrent certains problèmes. Il fallut l'intervention de d'Alembert au 18ième siècle pour définir la « dérivée » comme limite de taux d'accroissement d'une fonction et patienter jusqu'au milieu du 19ième siècle pour que Weierstrass formalise la notion de « dérivée ». Ce nouveau terme, ainsi que sa notation, furent inventé par Lagrange à la fin du 18ième siècle.

5.2 Domaine de définition

Tout d'abord, voici quelques rappels concernant le domaine de définition d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Une des premières questions que l'on doit se poser lorsque l'on étudie une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. est de déterminer l'ensemble de définition : pour quels réels x l'opération $f(x)$ a du sens ? Pour cela, il convient de déterminer les réels aboutissant à une opération illicite afin de les exclure. Par exemple : on ne peut diviser par zéro, il n'est pas non plus possible de calculer la racine carré d'un nombre négatif,. . .

Exemple 5.2.1. Considérons la fonction suivante :

$$x \mapsto \frac{1}{x-1}$$

Il est alors évident que le dénominateur s'annule lorsque $x = 1$. Hormis cette valeur, tous les autres calculs sont possibles. Le domaine de définition de la fonction est alors $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Si maintenant la fonction est peu plus complexe :

$$x \mapsto \frac{1}{x^2+3x-1},$$

il convient alors de déterminer les racines du polynômes $P(x) = x^2 + 3x - 1$ afin de les exclure.

Si jamais nous considérions la fonction suivante :

$$x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^2+3x-1}},$$

il faudrait établir un tableau de signe pour le polynôme P afin d'exclure les nombres réels tels que $P(x) \leq 0$.

5.3 Dérivabilité et variations

Nous anticipons un peu un chapitre ultérieur en mentionnant l'un des applications majeures de cette année : l'étude des variations d'une fonction via le signe de sa dérivée. Nous allons proposer des exemples simples permettant de mieux saisir cette nouvelle notion, nous fournirons ensuite une définition du nombre dérivée et de la fonction dérivée d'une fonction donnée.

Débutons par un exemple instructif et considérons la fonction

$$f(x) = 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Il est assez simple de tracer son graphe et de constater, visuellement, que la fonction semble croissante au sens suivant.

Définition 5.3.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est croissante si, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Autrement dit, la fonction f préserve l'ordre entre x et y.

Remarque. On dira que f est décroissante, si elle renverse l'ordre entre x et y :

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

Nous sommes à présent en droit de nous interroger : pourquoi la fonction $f(x) - = 2x + 1$ est-elle croissante ? Un court moment de réflexion permet de répondre à cette question : ceci est provient du fait que le coefficient directeur (qui vaut 2 dans notre exemple) est positif. Si jamais nous substituons ce coefficient 2 par -2 nous aurions obtenu une fonction décroissante. Enfin, si ce coefficient directeur était nul la fonction f serait constante (égale à 1).

Ce que nous venons d'observer peut être résumé comme suit : pour une fonction $f(x) = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$, la monotonie de la fonction est déterminée par le signe du coefficient directeur m. Ceci est intéressant mais un peu restrictif : comment étudier des fonctions plus complexes que les fonctions affines ?

Compliquons légèrement et étudions la fonction $x \mapsto x^2$. Il est également facile de tracer son graphe et d'observer le fait suivant : la fonction semble décroitre lorsque x est négatif et la fonction semble être croissante lorsque x est positif avec un minimum en 0. On souhaiterai trouver un critère simple, comme le cas des fonctions affines, permettant de prouver l'observation précédente. Le problème est que nous ne disposons plus de droite mais de parabole et parler de coefficient directeur n'a plus de sens.

En revanche, il est possible de tracer des tangentes le long de la courbe induite par la fonction $x \mapsto x^2$. Bien que nous ne connaissions ni le coefficient directeur, ni l'ordonnée à l'origine, il semblerait que toutes les tangentes aient un coefficient directeur négatif lorsque $x \geq 0$ tandis qu'elles semblent avoir un coefficient directeur positif lorsque $x \leq 0$.

Il se trouve que cette remarque est cruciale est permet de traiter des cas beaucoup plus complexe :

le coefficient directeur des précédentes tangentes s'appelle le nombre dérivé et son signe permet de déterminer la monotonie de la fonction.

De manière un peu plus abstraite, voici ce que nous venons d'observer : à partir d'une fonction f donnée, nous avons (implicitement, de manière graphique) déterminé une nouvelle fonction et le signe de celle-ci nous a permis de savoir si la fonction était croissante ou décroissante (via le coefficient directeur des tangentes). Cette nouvelle fonction porte un nom : il s'agit de la dérivée de la fonction f. Cette fonction correspond à un (petit) taux d'accroissement entre deux points et l'étude de son signe permet de connaitre les variations d'une fonction donnée. Dans ce qui suit il est donc primordial de maîtriser la notion de tableau de signe.

Dans ce qui suit, I désignera un sous ensemble de $\mathbb{R}$ (il s'agira souvent d'un intervalle) sur lequel nos fonctions seront définies.

Définition 5.3.2. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ tel que $a + h \in I$ pour h suffisamment petit. Lorsque la limite suivante existe*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l < \infty$$

on dira que la fonction est dérivable au point a et nous noterons cette limite par $f'(a)$.

Remarque. Observons que le rapport

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a}$$

correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points $\big(a; f(a)\big)$ et $\big(a+h; f(a+h\ )\big)$ appartenant à la courbe C_f.

Il est à noter que certaines fonctions ne sont pas dérivables : par exemple $x \mapsto |x|$, n'est pas dérivable en 0.

Malheureusement, cette définition n'est pas très manipulable en pratique et il sera plus commode d'utiliser un formulaire dans lequel les dérivées des fonctions usuelles ont déjà été calculées. En voici quelques unes.

Proposition 20. *Le tableau suivant fournit le domaine de définition ainsi que la dérivée de fonctions usuelles.*

Fonction	*Domaine définition*	*Expression*	*Domaine dérivation*	*Dérivée*
constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
identité	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
carré	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
cube	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
inverse	$\mathbb{R}_*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
racine	$\mathbb{R}_+$	$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Remarque. 1. Plus généralement, il est possible de dériver les fonctions puissances. En effet, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $f(x) = x^n$ alors $D_f = \mathbb{R}$ et $f'(x) = nx^{n-1}$.

2. Ceci est également peut également valable pour les fonctions du type :

$$g\ :\ x \mapsto \frac{1}{x^n} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}_*.$$

En effet, pour $n \in \mathbb{N}_*$ et $x \neq 0$, $\frac{1}{x^n}$ peut s'écrire x^{-n} et ainsi $g'(x) = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$. Le cas $n = 1$ permet de retrouver la dérivée de la fonction inverse :

$$h(x) = \frac{1}{x^1} = x^{-1} \quad \text{et} \quad h'(x) = -1x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$$

3. Bien que cela sorte du programme, ceci fonctionne aussi pour la fonction racine : il suffit s'observer que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ pour $x \geq 0$ et donc, par mimétisme,

$$\big(\sqrt{x}\big)' = \big(x^{\frac{1}{2}}\big)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Démonstration. Démontrons certains de ces résultats.

1. Si f est une fonction constante, i.e. $f(x) = p$ avec $p \in \mathbb{R}$. Nous obtenons alors

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{p-p}{h} = 0 \underset{h \to 0}{\to} 0$$

2. Si f est la fonction carré, i.e. $f(x) = x^2$. Alors
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x+h \underset{h\to 0}{\to} 2x$$
3. Si, nous considérons la fonction inverse, i.e. $f(x) = \frac{1}{x}$. Nous obtenons
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \frac{-h}{(x+h)x} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{(x+h)x} \underset{h\to 0}{\to} \frac{-1}{x^2}$$
4. La démonstration pour les fonctions puissances et racine sont admises. Le cas de la fonction cube est laissé à titre d'exercice.

□

A tout ceci s'ajoute plusieurs règles de dérivations permettant de traiter des fonctions plus complexes : si je connais la dérivée de u et la dérivée de u, puis-je en déduire la dérivée de $u+v$? de uv ? de $\frac{u}{v}$ (lorsque v ne s'annule pas) ? Ces règles de dérivations sont essentielles et sont résumées dans la proposition qui suit.

Proposition 21. *Soient u, v deux fonctions dérivables sur I et $a \in \mathbb{R}$.*

1. $\big(au\big)' = au'$.
2. $\big(u+v\big)' = u' + v'$.
3. $\big(uv\big)' = u'v + uv'$.
4. *Si v ne s'annule pas,*
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Remarque. En particulier, lorsque $v = u$, le point 3 nous assure que $(u^2) = u'u + uu' = 2uu'$. Il est primordial de retenir les faits suivants :

la dérivée d'un produit (resp. quotient) n'est pas le produit (resp. quotient) des dérivées !

Démonstration. Démontrons ces résultats. Le premier point est laissé en exercice, le troisième et dernier points sont admis car les démonstrations nécessitent une notion hors-programme. Traitons, le cas de la dérivée d'une somme :

$$\begin{aligned}\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h} &= \frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h} \\ &= \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \underset{h\to 0}{\to} u'(x)+v'(x)\end{aligned}$$

puisque les fonctions u et v sont supposées dérivables.

□

A partir de ces règles, il sera possible de dériver toutes les fonctions que nous rencontrerons durant le cours. L'étude du signe de ces dérivées permettront ensuite de déterminer les variations de la fonction initiale. Nous y reviendrons plus tard durant le cours, nous allons d'abord nous focaliser sur des calculs de dérivation de fonction.

Pour conclure ce chapitre, nous énonçons ci-dessous la formule permettant de déterminer (lorsque cela existe) l'équation de la tangente à une courbe. Fournissant une formule rigoureuse du phénomène que nous avions observé au début de ce chapitre.

Proposition 22. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 \in I$ est alors donnée par*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Remarque. En pratique, l'énoncé de l'exercice fournit la valeur de x_0 et il ne reste plus qu'à déterminer $f'(x_0)$ et $f(x_0)$. A priori, l'équation obtenue doit avoir la forme suivante :

$$y = ax + b$$

avec $a = f'(x_0)$ et $b = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$.

5.4 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Savoir utiliser les formules de dérivations des fonctions usuelles.
- Savoir dériver des produits, sommes, quotients de fonctions usuelles.
- Savoir calculer l'équation de la tangente à une courbe.

5.5 Pour aller plus loin

5.5.1 Modèle dynamique

L'année prochaine vous rencontrerez de nouvelles équations. Dans celles-ci vous n'aurez pas à déterminer un ensemble de nombre réels comme en 1ère S mais vous devrez trouver une fonction vérifiant certaines propriétés. Précisons ceci, en 1ère S vous deviez résoudre des équations de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0,\ (b, c) \in \mathbb{R}^2,$$

cela revenait à trouver tous les nombres réels x vérifiant l'équation précédente. En terminale, on vous demandera de trouver toutes les fonctions f vérifiant certaines conditions. Par exemple, quelles sont les fonctions dont la dérivée est la fonction elle-même :

$$f'(x) = f(x) \quad \text{pour tout}\, x \in \mathbb{R}$$

Il s'agit d'équations dites « différentielles »et vous apprendrez comment les résoudre l'année prochaine. Quoiqu'il en soit, ce genre d'objet permet de modéliser des situations réelles assez intéressantes.

Nous avons vu que la dérivée correspondait à un taux d'accroissement. Si jamais f désigne la population d'une espère, il ne parait donc pas absurde d'imaginer que f' permet de savoir de quelle manière cette population grandie ou diminue.

En 1926, les mathématiciens A. J. Lotka et V. Volterra ont proposé un modèle mathématiques permettant de représenter la dynamique de population d'un couple de proies et de prédateurs (a priori, il s'agissait de lynx et de lièvre des neiges).

Dans ce qui suit nous adopterons les notations suivantes :

- la fonction f désigne la population des proies,
- la fonction g désigne la population des prédateurs,
- $a \in \mathbb{R}$ désigne le taux de reproduction des proies,
- $b \in \mathbb{R}$ désigne le taux de mortalité des proies (lui même est lié à la fréquence des rencontres des proies avec leurs prédateurs),
- $c \in \mathbb{R}$ désigne le taux de reproduction des prédateurs (il dépend du nombre de proies mangées),
- $d \in \mathbb{R}$ désigne le taux de mortalité des prédateurs.

Le modèle est alors le système suivant :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \times \big(a - bg(x)\big) \\ g'(x) = g(x) \times \big(cf(x) - d\big) \end{cases}$$

Bien que d'apparence simple, il n'est pas possible de résoudre explicitement ce système (i.e. trouver une formule explicite pour les fonctions f et g). En revanche, étant données des conditions initiales (population de départ,...), le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure qu'il existe une unique solution à ce problème et il est possible de décrire ces solutions de manière qualitatives (périodicité,...).

5.5.2 Dérivées partielles

Voici quelques mots sur une généralisation de la notion de dérivation. Dans de nombreux domaines, il est souvent nécessaire de considérer des fonctions de plusieurs variables (le temps et l'espace par exemple). Mathématiquement, cela revient à considérer des fonctions de la forme

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

Il est alors tentant de chercher à déterminer les variations de cette fonction par rapport à la variable x ou y. Pour cela, il suffit de s'intéresser à l'un d'entre elles, x par exemple, et de considérer que la seconde variable, y par exemple, est constante. Il est alors possible d'écrire le taux d'accroissement selon la variable x pour obtenir la notion de dérivée partielle : lorsque la limite suivante existe nous la désignerons par $\partial_x f(x,y)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \partial_x f(x,y) \quad y \in \mathbb{R}$$

Voyons plutôt sur un exemple.

Exemple 5.5.1. Posons : $f(x,y) = x+y$, alors

$$\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \frac{x+h+y-(x+y)}{h} = 1 \underset{h\to 0}{\to} = 1.$$

Autrement dit $\partial_x f(x,y) = 1$ et, de manière similaire, nous obtiendrons $\partial_y f(x,y) = 1$

De nombreuses propriétés que nous avons vu dans ce chapitre sont encore vérifiées lorsque la fonction considérée mets en jeu plusieurs variables. A vrai dire, les calculs sont souvent plus longs mais rarement plus compliqués.

Cette notion de dérivée partielles est prépondérante en physique et apparait naturellement dans des équations particulières (appelées équations aux dérivées partielles) permettant de modéliser des phénomènes physiques important. Pour attiser votre curiosité, nous indiquons ci-dessous la forme de telles équations.

- équation de la chaleur : $\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u$,
- équation des ondes : $\partial^2_{tt} u = c^2 \partial^2_{xx} u$ avec $c > 0$,
- équation de Schrödinger (décrivant les déplacements d'une particule en physique quantique) : $i\partial_t u + \Delta u + f = 0$ avec f une fonction donnée. Cette formulation correspond plus à une version mathématicienne de l'équation de Schrödinger et de nombreuses constantes physiques n'y apparaissent pas (notamment la constante de Planck).

Chapitre 6

Statistiques

6.1 Introduction

La Statistique (l'étude de données statistique) est relativement récente (bien qu'il existe de nombreuse traces, dans l'Histoire, de listes d'objets ou de nombres) et fait partie des mathématiques traitant les évènements aléatoires.

A COMPLETER

Quant à elle, la boite à « moustaches »a été inventée par Tukey en 1977.

6.2 Rappels

Dans ce chapitre, nous considèrerons une série de n observations ordonnées, notées $x_1, \ldots, x_n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Voici quelques mots de vocabulaire à connaitre .

Définition 6.2.1. *Une série d'observations, ou série statistique, se définit à partir de deux paramètres :*

1. *Une population qui est l'ensemble des individus (ou objets) observés.*
2. *Un caractère qui est la qualité étudiée dans la population.*

Remarque. Observons que le caractère étudié peut-être de nature diverses :

- qualitatif lorsqu'il n'est pas numérique.
- quantitatif discret lorsqu'il peut prendre un nombre fini de valeurs numériques.
- quantitatif continu lorsqu'il peut prendre un nombre infini de valeurs réelles.

Exemple 6.2.1. Supposons que nous ayons un sondage à disposition. Celui-ci a été réalisé auprès de n personnes (composant la population étudiée) pour connaître leur intention de vote au second tour d'une élection (il s'agit du caractère étudié). Les réponses possibles de ce sondage sont : « Oui », « Non » et « Ne se prononce pas »(il s'agit caractère qualitatif).

Exemple 6.2.2. Un professeur reporte les notes de son dernier contrôle sur son ordinateur. Pour chaque copie (l'ensemble des copies correspond à la population), il a attribué une note (correspondant au caractère étudié) pouvant aller de 0 à 20 avec un pas de $0,25$ (il s'agit donc d'un caractère quantitatif discret).

Dans toute la suite, nous essayerons de décrire une série statistique à caractère quantitatif à partir de certains indicateurs. Certains d'entres eux ont déjà été vus au collège ou en classe de seconde.

6.3 Description par quantiles

Pour décrire une série statistique nous allons déterminer des valeurs associées : il s'agit de quantile particuliers. Nous allons nous focalisé sur la médiane ainsi que sur le premier et dernier quartile permettant de mesurer la dispersion de la série autour de sa médiane.

Définition 6.3.1. *Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une série statistique à caractère quantitatif. Voici la définition de certains quantiles.*

- *La médiane est :*
  1. *la valeur **centrale** lorsque n est impair.*
  2. *la **moyenne des deux valeurs centrales** lorsque n est pair.*

  Dans tous les cas, nous noterons la médiane par Med.
- *Le premier quartile Q_1 est la plus petite valeur de la série telle que 25% des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.*
- *Le troisième quartile Q_3 est la plus petite valeur de la série telle que 75% des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.*

  La quantité $Q_3 - Q_1$ est appelé « écart interquartile »et correspond à 50% de la population étudiée.

Remarque. Rappelons que « l'étendue » d'une série statistiques est la différence entre la plus grande valeur de la série (son maximum) et la plus petite (son minimum). Nous la noterons e.

Exemple 6.3.1. Observons la série statistique suivante :

Longueur (en m)	37	39	40	41	42	43	44	48
Effectif	4	3	4	2	2	4	5	2
Effectif cumulés	4	7	11	13	15	19	24	26

1. La longueur médiane des lancers de javelot présentés dans ce tableau est Med $= 41,5m$. En effet, l'effectif total est pair (ici $N = 26$) donc la médiane est la moyenne des 13ème et 14ème longueurs ; lesquelles sont égales à $41m$ et $42m$.

2. Il est facile de déterminer le 1er quartile, puisque $\frac{26}{4} = 6,5$, Q_1 est la 7ème longueur, à savoir : $Q_1 = 39m$.

3. Ce qui permet d'obtenir le troisième quartile : Q_3 est la 20ème longueur, puisque $3 \times 6,5 = 19,5$, à savoir : $Q_3 = 44m$.

4. Enfin, l'écart interquartile correspond donc à $[39; 44]$.

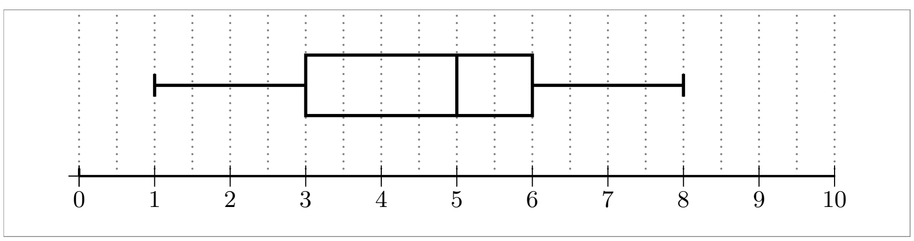
L'ensemble de ces informations donne une première description de la série $(x_1, \ldots, x_n)$. Elles sont résumées dans la représentation graphique suivante.

Définition 6.3.2. *Un diagramme de Tukey (aussi appelé « boîte à moustache ») est un résumé, sur un axe gradué, des quantiles définis ci-dessus. Ce diagramme est constitué*

- *d'une boîte (dont la hauteur est prise de manière arbitraire) délimitée par le* 1*er et* 3*ème quartiles. Cette même boite est ensuite partagée par la médiane.*

- *de « moustaches » qui relient les quartiles aux valeurs extrêmes de la série.*

Un exemple est donné ci-dessous correspondant aux notes (sur 10) d'étudiants.



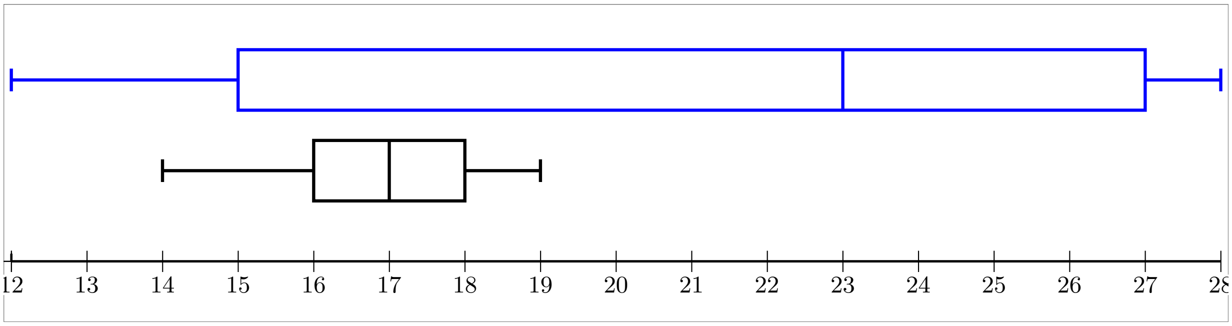
Exemple 6.3.2. Sur le diagramme précédent, nous lisons donc :

- La médiane Med vaut 5. Ainsi la moitié des élèves ont eu plus de la moyenne.

- Le premier quartile Q_1 vaut 3 et le troisième quartile Q_3 vaut 6.

- Les valeurs extrêmes valent 1 pour le minimum et 8 pour le maximum.

Exemple 6.3.3. Il est souvent utile de comparer des diagrammes de ce genre pour émettre des hypothèses. Par exemple, imaginons que nous ayons relevé, à différents intervalles (toutes les heures, pendant quatre jours), les températures dans une forêt (en noir) et dans un champ (en bleu) proche de cette même forêt. Ces mesures ont donné lieu aux diagrammes suivants.



Quelle semble être l'influence des arbres sur la température à l'intérieur de la forêt ?

- Ces diagrammes montrent que les températures sont beaucoup plus dispersées dans les champs. Il est possible de supposer que les arbres permettent de maintenir une température plus stable.

- Ces diagrammes montrent aussi que les températures sont globalement plus basses en forêt, il est possible émettre l'hypothèse que les arbres aident à conserver la fraîcheur.

6.4 Description par moyennes

Dans cette section, nous présentons une autre manière de décrire une série statistique. Plaçons nous à présent dans le cadre d'une série statistique $(x_k; n_k)$, $k = 1, \ldots, l$, $r \in \mathbb{N}$ où les valeurs distinctes $x_1, \ldots, x_l$ ont pour effectif respectif $n_1, \ldots, n_l$ (ou pour fréquence $f_1, \ldots, f_r$). L'effectif total de la série est noté N où $N = n_1 + \ldots + n_l$.

Définition 6.4.1. *La moyenne de la série statistique $(x_k; n_k)$ où $1 \leq k \leq l$ est le nombre m (aussi noté $\bar{x}$) défini par :*

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{l} n_i x_i = \sum_{i=1}^{r} f_i x_i$$

Exemple 6.4.1.

Don (en euros)	10	15	20	30	50	Total
Effectif	12	17	10	11	5	55

C'est pourquoi, le don moyen $\bar{x}$ est de $21 = \frac{12\times10+17\times15+10\times20+11\times30+5\times50}{55}$ euros.

Similairement au cas de la médiane, la moyenne seule n'est qu'un outil limité ne tenant pas compte de la dispersion. Pour palier ce manque, nous définissons les quantités suivantes.

Définition 6.4.2. . *La variance de la série statistique $(x_k; n_k)$, pour $1 \leq k \leq l$, est notée* V *est définie par*

$$\mathrm{V} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{l} n_i (\bar{x} - x_i)^2 = \sum_{i=1}^{l} f_i (\bar{x} - x_i)^2$$

Remarque. Observons que la variance est simplement la moyenne des écarts à la moyenne au carré. Autrement dit, la moyenne des $(\bar{x} - x_i)^2$. Par souci d'homogénéité, nous utiliserons plus souvent la racine carrée de la variance notée $\sigma = \sqrt{V}$ et appelée écart type de la série.

Exemple 6.4.2. Comme nous allons le voir sur l'exemple suivant, la variance permet d'en apprendre plus sur une série statistique et complète l'information apportée par la moyenne.

Considérons les deux séries statistiques suivantes :

$$S_1 : \{9; 9; 11; 11\} \quad \text{et} \quad S_2 : \{1; 1; 19; 19\}.$$

Ces deux séries ont la même moyenne : 10. Calculons la variance et l'écart-type de ces deux séries :

1. Pour la première série S_1, nous avons

$$V_1 = \frac{2(9-10)^2 + 2(11-10)^2}{4} = 1 \quad \text{et} \quad \sigma_1 = \sqrt{V_1} = 1$$

2. pour la deuxième série S_2, nous obtenons

$$V2 = \frac{2(1-10)^2 + 2(19-10)^2}{4} = 81 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sqrt{V_2} = 9$$

6.5 Comparaison de séries

La description d'une série passe souvent par le choix d'un paramètre dit de position (moyenne ou médiane) qui donne une première information. Cette information, partielle, est complétée par un paramètre de dispersion correspondant (écart interquartile ou écart type). Ceci donne un couple de paramètres qui offre une première synthèse des observations et facilite la comparaison de séries. En effet,

1. Le couple $(\text{Med}; Q_3 - Q_1)$ donne une indication de la tendance centrale de la série (médiane) et de la concentration de la moitié des données autour de cette dernière (écart interquantile). Il est peu sensible aux valeurs extrêmes. En revanche, l'écart interquartile ne prend en compte que la moitié de la population et peut ne pas être représentatif.

2. Le couple $(m; \sigma)$ donne une indication de la tendance moyenne de la série (moyenne) et mesure le carré des écarts à cette dernière (écart type). Il est très sensible aux valeurs extrêmes. En revanche, il s'avère très efficace dans le cas de séries symétriques autour de la moyenne (phénomène rencontré par exemple dans les sondages).

Remarque. Comme nous le verrons, la calculatrice permet facilement d'obtenir ces différentes valeurs associées à une série statistique.

6.6 Bilan

- Déterminer la nature d'une série statistique (population, caractère...).

- Déterminer la boîte à moustache correspondant à une série statistique.
- Savoir calculer la moyenne, la variance et l'écart type d'une série statistique.
- Comparer deux séries et commenter.

Chapitre 7

Trigonométrie et angles orientés

7.1 Cercle trigonométrique et mesure d'angle

Définition 7.1.1. *Un cercle trigonométrique* $\mathcal{C}$ *est un cercle de rayon* 1 *sur lequel nous distinguerons deux sens de parcours :*

- *le sens direct lorsque le cercle est parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;*
- *le sens indirect lorsque le cercle est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.*

Remarque. Les mesures suivantes seront utiles par la suite : la longueur d'un cercle vaut 2π, celle du demi-cercle vaut donc π et celle d'un quart de cercle vaut $\frac{\pi}{2}$.

Le cercle trigonométrique permet d'introduire une nouvelle unité de mesure d'angles : le radian.

Définition 7.1.2. *Le radian, noté* rad, *est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur le cercle* $\mathcal{C}$ *un arc de longueur* 1.

Remarque. Il y a une relation de proportionnalité entre les degrés et les radians. En effet, nous savons que la relation suivante est vérifiée

$$360 \quad \text{degrés équivaut à} \quad 2\pi\text{rad} \quad \text{(la longueur du cercle trigonométrique)}$$

C'est pourquoi nous avons le tableau suivant :

Degrés	360	d
Radian	2π	r

Ce tableau de proportionnalité nous fournit la relation suivante $180 \times r = d \times 2\pi$ qui permet de convertir des degrés en radian et vice-versa.

Les valeurs remarquables suivantes sont à connaitre

Degrés	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

7.2 Anglé orienté d'un couple de vecteurs

Nous allons voir qu'il est possible d'orienter le plan et d'utiliser le cercle trigonométrique pour associer la mesure d'un angle entre deux vecteurs non nuls. A cet effet, soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. A partir du centre O du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, il existe deux points du plan M et N tels que

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{v}$$

De plus, observons que les demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ coupent le cercle en des points A et B. La longueur l, sur le cercle $\mathcal{C}$, entre les points A et B va permettre de définir la mesure de l'angle associé aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Définition 7.2.1. *Dans le contexte précédent, la famille des nombres réels $l + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.*

Remarque. De manière informelle, le nombre k indique le nombre de tour (du cercle trigonométrique) qui a été fait. En pratique, nous allons souvent confondre un angle avec l'une de ses mesures. Notons aussi que l'ordre des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est important. En effet, si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = l$ alors $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = 2\pi - l$.

7.2.1 Mesure principale d'un angle orienté de vecteurs

Certains mesures sont plus simples à utiliser que d'autres.

Définition 7.2.2. *Parmi les mesures $l + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, d'un angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, il en existe une et une seule appartenant à l'intervalle $I =]-\pi; \pi]$. Cette mesure s'appelle la mesure principale de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.*

Remarque. La valeur absolue de la mesure principale d'un angle coïncide avec l'angle géométrique défini par les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Les autres mesures de cet angle sont obtenu en rajoutant des « tours de cercle » : si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = l$ alors toutes les autres mesures de cet angle sont de la forme $l + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Voyons ce que nous obtenons sur deux exemples.

Exemple 7.2.1.
1. Supposons que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{37}{6}\pi$ et déterminons la mesure principale de cet angle orienté. Pour cela, il suffit d'observer que

$$\frac{37\pi}{6} = \frac{6 \times 6 + 1}{6}\pi = (6 + \frac{1}{6})\pi = \frac{\pi}{6} + 3 \times 2\pi\,;$$

la mesure principale est donc $\frac{\pi}{6}$.

2. De manière similaire, si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{202\pi}{3}$ nous avons

$$\frac{202\pi}{3} = \frac{67 \times 3 + 1}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + 67\pi\,;$$

ici, il faut poursuivre un peu nos calculs afin de faire apparaitre un multiple de 2π à la place de 67π. Cela s'effectue de la manière suivante

$$67\pi = 68\pi - \pi,$$

ainsi $\frac{\pi}{3} + 67\pi = \frac{\pi}{3} + 68\pi - \pi = -\frac{2\pi}{3} + 34 \times 2\pi$. La mesure principale vaut donc $-\frac{2\pi}{3}$ et l'angle géométrique associé a pour mesure $\left| -\frac{2\pi}{3} \right| = \frac{2\pi}{3}$.

7.2.2 Propriétés des angles orientés

Voici quelques propriétés des angles orientés, celles-ci s'obtiennent grâce à du calcul vectoriel.

Proposition 23 (Colinéarité et angle orienté)**.** *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors*

- *dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens est équivalent à $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$;*
- *dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens opposé est équivalent à $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi$*

Remarque. Ce résultat donne une autre façon de prouver que trois points sont alignés ou de montrer que des droites sont parallèles.

Une relation de Chasles existe également pour les angles orientés.

Proposition 24 (Relation de Chasles)**.** *Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs non nuls, alors*

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$$

Remarque. En conséquence de cette relation de Chasles, nous avons les relations suivantes :

$$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = -(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \quad ; \quad (\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \pi \quad ; \quad (-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \pi \quad ; \quad (-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

Il est également important d'observer que la substitution d'un vecteur par un autre vecteur colinéaire, de même sens, n'affecte pas le mesure de l'angle orienté. Par exemple

$$(2\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \quad ; \quad (\overrightarrow{u}, 3\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \quad ; \quad (2\overrightarrow{u}, 3\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

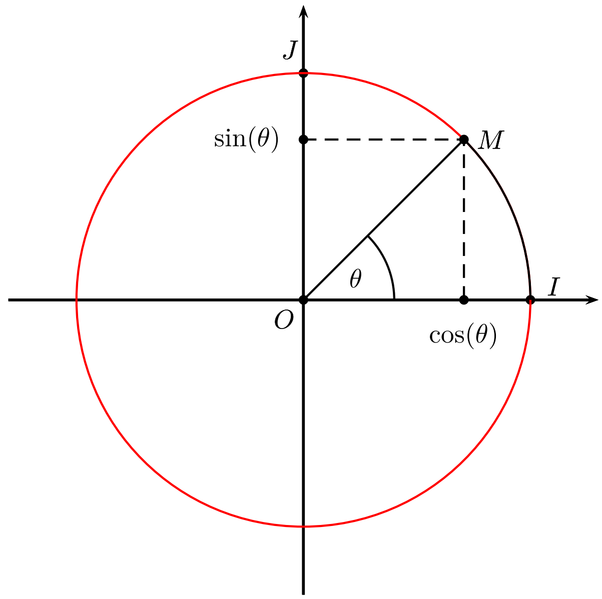
7.3 Fonction cosinus et sinus d'un angle orienté

Pour introduire ces nouvelles fonctions, il est important de se placer dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ direct ; si $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$ ceci signifie que

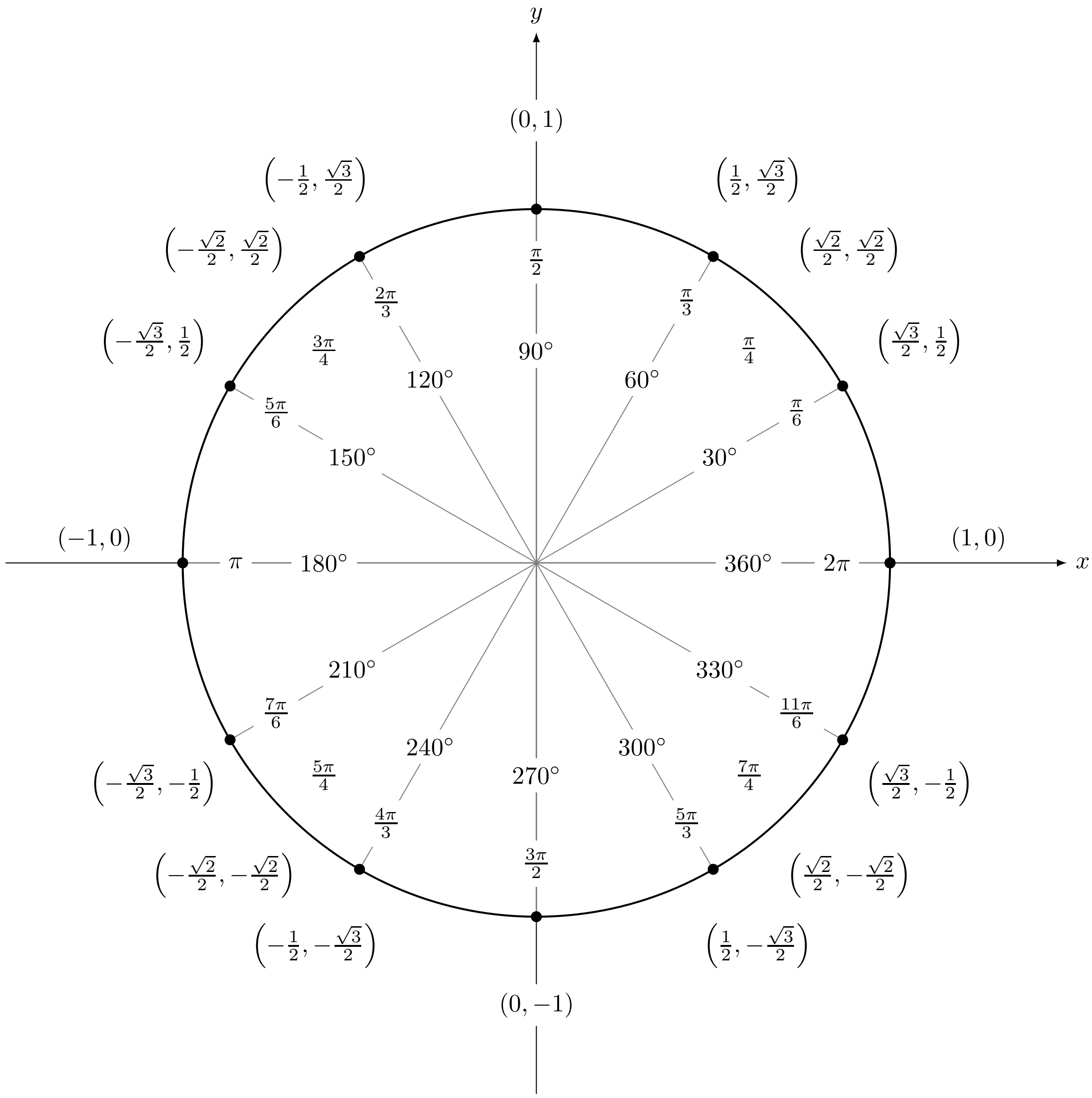
$$\| \overrightarrow{i} \| = \| \overrightarrow{j} \| = 1 \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = \frac{\pi}{2}$$

Définition 7.3.1. *Dans un tel cadre, à tout points M appartenant au cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O, nous associons les quantités suivantes :*

- *nous noterons θ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$;*
- *le cosinus de θ, noté $\cos(\theta)$, correspondra à l'abscisse du point M ;*
- *le sinus de θ, noté $\sin(\theta)$, correspondra à l'ordonnée du point M.*



Voyons quelques propriétés de ces nouvelles fonctions. Tout d'abord, il est important de calculer quelques valeurs remarquables de ces fonctions.



Sur la figure précédente, l'abscisse de chaque point fourni la valeur du cosinus de l'angle correspondant et l'ordonnée la valeur du sinus. Par exemple, le point $M(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ permet de savoir que

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Il est essentiel de retenir les valeurs suivantes.

θ (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Les autres valeurs peuvent être retrouvées de manière élémentaire à l'aide d'arguments géométriques que nous allons décrire ci-dessous.

7.3.1 Propriétés des fonctions trigonométriques

Proposition 25. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ les identités suivantes sont satisfaites*

- $\cos(x) \in [-1;1]$ *et* $\sin(x) \in [-1;1]$,
- $\cos(x + k2\pi) = \cos(x)$ *et* $\sin(x + k2\pi) = \sin(x)$, *ces fonctions sont dites* 2π*- périodiques,*
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Voici les propriétés géométriques dont nous parlions plus tôt. Il en existe encore d'autres mais nous ne les aborderons pas dans ce cours.

Proposition 26. *Pour tout réel x, nous avons*

- *(Autour du cosinus)* $\cos(x) = \cos(-x)$ *et* $-\cos(x) = \cos(x-\pi) = \cos(x+\pi)$.
- *(Autour du sinus)* $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ *et* $-\sin(x) = \sin(-x) = \sin(\pi + x)$.
- *(Relation entre les deux)* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ *et* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$.

A toute fin utile mentionnons également les formules d'additions suivantes :

Proposition 27. *Soient a, b deux réels alors*

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b) \quad \textit{et} \quad \sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$

7.4 Equations trigonométriques

Enfin, pour conclure ce chapitre, il faudra résoudre des équations de la forme

$$\cos(x) = u \quad \text{ou} \quad \sin(x) = u \quad \text{avec} \quad u \in [-1;1]$$

Autrement dit, lorsque u est une valeur donnée, il faut trouver l'ensemble des réels x satisfaisant les équations précédentes. Pour résoudre, ceci nous avons le résultat suivant

Proposition 28. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons les relations suivantes*

- $\cos(x) = \cos(a) \iff \{x = \pm a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

- $\sin(x) = \sin(a) \iff \{x = a + 2k\pi \quad ou \quad x = \pi - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque. En pratique pour résoudre $\cos(x) = u$ il faudra d'abord trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(a) = u$ pour ensuite appliquer le résultat précédent. Ce genre d'équations sera très important l'année prochaine lorsque vous étudierez les nombres complexes.

Chapitre 8

Dérivée et variations d'une fonction et sens de variations

Nous avons déjà rencontré la notion de fonction dérivée dans un chapitre précédent. Ici, nous allons enfin voir de quelle manière l'étude du signe de la fonction dérivée permet d'obtenir des informations sur le sens de variations d'une fonction et de déterminer l'existence d'éventuels extremums. Par la suite $f : I \to \mathbb{R}$ désignera une fonction dérivable sur un *intervalle* ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

Théorème 29 (Variations)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*

1. *Si $f'(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ alors $x \mapsto f(x)$ est une fonction croissante sur I.*

2. *Si $f'(x) \leq 0$, $x \in \mathbb{R}$ alors $x \mapsto f(x)$ est une fonction décroissante sur I.*

3. *Si $f'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ alors $x \mapsto f(x)$ est une fonction constante sur I.*

Remarque. Il est possible de définir de manière similaire la notion de fonction strictement croissante ou strictement décroissante si l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes dans les points 1 et 2 de la proposition précédente.

Exemple 8.0.1. La fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 12$ est dérivable et $f'(x) = x^2 + x - 2$. Il faut à présent étudier le signe de f'. Un rapide calcul du discriminant associé montre que f' admet deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$. Nous pouvons donc dresser le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

puisque $a = 1 > 0$. En conséquence de ceci, il est possible d'en déduire (à l'aide du théorème précédent) le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	

Remarque. Il est essentiel de suivre les étapes suivantes lors de l'étude d'une fonction :

1. Déterminer le domaine de définition et de dérivation (lorsque cela est demandé) ;

2. Calculer f' et étudier son signe ;

3. Déterminer les variations et la nature des extremums (s'ils existent) ;

4. Proposer une graphique représentant de manière fidèle la courbe en indiquant les tangentes horizontales.

5. Il est parfois demander de calculer l'équation d'une tangente T, puis d'étudier la position relative entre C_f et T.

Lorsque la fonction dérivée s'annule et change de signe autour d'un point, cela permet de détecter la présence d'extremums. A ce propos rappelons la définition suivante.

Définition 8.0.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$.*

- *$x_0 \in I$ est un maximum local, s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que*
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \textit{pour tout} \quad x \in J$$
- *$x_0 \in I$ est un minimum local, s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que*
$$f(x) \geq f(x_0) \quad \textit{pour tout} \quad x \in J$$

Remarque. Le maximum ou le minimum sera dit global s'il est possible de choisir $J = I$ dans la définition précédente. Un extremum désigne sans distinction un maximum ou un minimum d'une fonction

Théorème 30 (Extremums)**.** *1. Si $x_0 \in I$ est un extremum de f alors $f'(x_0) = 0$.*

2. S'il existe un réel x_0 tel que $f'(x_0) = 0$ et que la dérivée change de signe autour de x_0 (par exemple $f'(x) > 0$ si $x > x_0$ et $f'(x) < 0$ si $x < x_0$ alors $f(x_0)$ est un extremum (local) de f.

Remarque. 1. Attention, si la dérivée s'annule en un point mais ne change pas signe autour de ce point, il ne s'agit pas d'un extremum. Par exemple, si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 2x^2$ et $f'(0) = 0$ mais f' ne change pas de signe et 0 n'est pas un extremum de f.

2. Il est usuel d'appeler points critiques les valeurs annulant la dérivée.

Exemple 8.0.2. Etudions les variations de la fonctions $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - 1$ à l'aide du théorème précédent.

Chapitre 9

Variable aléatoire, loi de probabilité, espérance

9.1 Introduction

Contrairement à d'autres branches des mathématiques, la géométrie euclidienne ou l'algèbre par exemple, les probabilités sont nées beaucoup plus tardivement. Quelques considérations élémentaires furent abordées par Jérôme Cardan au début du XVI-ième siècle et par Galilée au début du XVII-ième siècle mais le véritable début de cette théorie date de la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal, en 1654.

Il fallut attendre la deuxième moitié du XVII-ième siècle, à la suite des travaux de Blaise Pascal et Pierre de Fermat, pour que le terme « probabilité » prenne peu à peu son sens actuel, grâce aux études menées par Jakob Bernoulli.

A la fin du XVIII-ième siècle, cette nouvelle théorie fera son apparition dans l'encyclopédie de Diderot. Cependant, il fallut patienter jusqu'au début du XX-ième siècle pour que la théorie des probabilités un nouvel essor. Celui-ci est du à la mise en place, en 1933, par le mathématicien russe Kolmogorov, d'une axiomatisation mathématique (que nous utilisons toujours actuellement) permettant de traiter la théorie des probabilités avec une véritable rigueur. Il fut d'ailleurs à l'origine de travaux révolutionnaires dans cette branche et résolu un grand nombre de problèmes qui avait dérouté de nombreux mathématiciens de l'époque.

Bien entendu, il existe de nombreuses expériences aléatoires beaucoup plus complexes que celles vues en classe de seconde (lancé de dés, pile ou face,...). Cependant la description précise de celles-ci dépasse largement le cadre de ce cours. A titre d'exemple, voici un phénomène qu'il est possible de visualiser chez soi : imaginons que nous observions un grain de poivre dans une casserole d'eau bouillante. Les molécules d'eau, agitées, vont venir frapper et déplacer le grain de poivre. La trajectoire du grain de poivre devient alors erratique, imprévisible et correspond à un objet probabiliste très célèbre : le mouvement Brownien. Celui-ci a été découvert par le botaniste Brown (en 1827) et fut étudié par Einstein (en 1905), cet objet est notamment utilisé, entre autre, en finance pour décrire l'évolution de la bourse. Il est également possible de visualiser ceci en ligne, sur le site

$$http : //labs.minutelabs.io/Brownian - Motion/.$$

9.2 Loi d'une variable aléatoire

9.2.1 Variable aléatoire

Définition 9.2.1. *Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Définir une variable aléatoire X sur Ω revient à associer à chaque issue de E un nombre x.*

Remarque. Une variable aléatoire est une fonction X dont l'issue est aléatoire.

Voici un exemple permettant de mieux appréhender ceci.

Exemple 9.2.1. Considérons l'expérience aléatoire suivante.

Un joueur mise 2 euros puis lance deux dés trétraédiques parfaits. Il lit le résultat obtenu sur chacun des dés (un entier compris entre 1 et 4). S'il obtient un « double », le joueur récupère sa mise et reçoit une somme, en euros, égale au total des points marqués ; sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise.

Nous nous intéressons au gain (algébrique) du joueur que nous noterons X (les valeurs prises par la fonction X sont aléatoires, il s'agit bien d'une variable aléatoire).

Décrivons plus en détails, l'expérience aléatoire mise en jeu :

- l'univers de cet expérience est un couple d'entier $(x; y)$ avec $1 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y \leq 4$. Les dés étant parfaits, les issues obtenues sont équiprobables et se réalisent avec une probabilité de $\frac{1}{16}$.
- Pour définir la variable X il est important de décrire les valeurs qu'elle va prendre à partir des différentes issues de l'expérience aléatoire. Ceci peut s'effectuer à l'aide d'un tableau à double entrée : la première ligne désigne le résultat du premier dé, tandis que la première colonne correspond à la valeur affichée par le deuxième dé. C'est-à-dire, a chaque issue nous associons un gain : $(1, 1) \mapsto 2$, $(1, 2) \mapsto -2$,... afin de définir la variable aléatoire X.

	1	2	3	4
1	2	-2	-2	-2
2	-2	4	-2	-2
3	-2	-2	6	-2
4	-2	-2	-2	8

9.2.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Une fois qu'une variable aléatoire est définie, il est intéressant de déterminer avec quelle probabilité les différentes valeurs sont prises. Par exemple, quelle est la probabilité de l'évènement

« gagner 2 euros » ? Autrement dit, quelle est la probabilité que $X = 2$?

En utilisant le tableau de la section précédente, nous observons que cet évènement est uniquement réalisé pour l'issue $(1;1)$. Donc, puisqu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité,

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{16}.$$

De manière similaire, l'évènement $X = -2$ est composé de 12 issues (tous les couples $(x;y)$ avec $x \neq y$), cela assure donc que

$$\mathbb{P}(X = -2) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Il est alors utile de résumé ceci dans un tableau.

Gain x_i	-2	2	4	6	8
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Ce tableau représente la loi de probabilité de X.

Définition 9.2.2. *Soit X est une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$ et désignons par $x_1, \ldots, x_k$ les différentes valeurs prises par X.*

Définir la loi de probabilité de X consiste à associer à chaque valeur x_i (pour $i = 1, \ldots k$) la probabilité de l'évènement $X = x_i$.

Remarque. Observons que $\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

9.3 Paramètres associés à une variable aléatoire

9.3.1 Espérance, variance et écart-type

Dans ce qui suit nous considérons une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant.

Valeur x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_k

Définition 9.3.1. *Voici trois paramètres associé à une variable aléatoire X :*

- *l'espérance de X, notée $\mathbb{E}[X]$ définie par*

$$\mathbb{E}[X] = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_k x_k = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i$$

- *la variance de X, notée par $\mathrm{Var}(X)$ et définie par*

$$\mathrm{Var}(X) = p_1\big(x_1 - \mathbb{E}[X]\big)^2 + p_2\big(x_2 - \mathbb{E}[X]\big)^2 + \ldots + p_k\big(x_k - \mathbb{E}[X]\big)^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i\big(x_i - \mathbb{E}[X]\big)^2$$

- *l'écart-type de X, noté $\sigma(X)$ et définie par $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.*

Remarque. La variance peut aussi s'exprimer de la manière suivante :

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Il s'agit de la formule de König-Huygens. La variance quantifie les fluctuations autour de la moyenne.

Exemple 9.3.1. Reprenons l'exemple du jeu de dé pour calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

1. $\mathbb{E}[X] = \frac{3}{4} \times (-2) + \frac{1}{16} \times 2 + \frac{1}{16} \times 4 + \frac{1}{16} \times 6 + \frac{1}{16} \times 8 = -0,25$. S'il le joueur joue un très grand nombre de parties (plus de 30) dans les mêmes conditions, le gain moyen qu'il peut espérer est de $-0,25$. Il s'agit d'une application de la loi forte des grands nombres de Kolmogorov.

2. Ici, $\mathrm{Var}(X) = \frac{3}{4} \times (-1,75)^2 + \frac{1}{16} \times (2,25)^2 + \frac{1}{16} \times (4,25)^2 + \frac{1}{16} \times (6,25)^2 + \frac{1}{16} \times (8,25)^2 = 10,4375$.

3. L'écart-type vaut donc $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 3,23$ (environ).

Voici d'autres propriétés utiles de l'espérance et de la variance.

9.3.2 Formules

Proposition 31. *Soit X est une variable aléatoire et considérons a, b des nombres réels. Les formules suivantes sont alors vérifiées*

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b \quad \textit{et} \quad \mathrm{Var}(aX) = a^2 \mathrm{Var}(X).$$

Démonstration. Par définition,

$$\mathbb{E}[aX + b] = \sum_{i=1}^{k} p_i(ax_i + b) = a\sum_{i=1}^{k} p_i x_i + b \times \sum_{i=1}^{k} p_i = a\sum_{i=1}^{k} p_i x_i + b = a\mathbb{E}[X] + b.$$

De manière analogue, grâce à la formule de König-Huygens, nous avons

$$\mathrm{Var}(aX) = \sum_{i=1}^{k} p_i(ax_i)^2 - \big(\mathbb{E}[aX]\big)^2 = a^2 \sum_{i=1}^{k} p_i(x_i)^2 - a^2\big(\mathbb{E}[X]\big)^2 = a^2 \mathrm{Var}(X).$$

□

9.4 Urne d'Ehrenfest

L'urne d'Ehrenfest est une expérience impliquant deux urnes contenant un total de N boules indiscernable au touché. Toutes ces boules sont numérotées de 1 à N et l'expérience consiste à tirer au hasard un numéro $l\{1, \ldots, N\}$ pour ensuite transférer la boule numéro I dans l'urne où elle n'était pas.

Le processus aléatoire d'Ehrenfest $(X_n)_{n\geq 0}$ (qui peut être vu une suite aléatoire) consiste à noter à chaque instant $n \geq 0$ le nombre de boules contenues dans la première urne.

Cette expérience est là pour modéliser un problème physique : prenons une enceinte hermétique séparée en deux compartiments de taille égale reliés entre eux par un fin tuyau. Laissant vide le compartiment B, remplissons le compartiment A d'un gaz quelconque. Assez rapidement, les molécules de gaz vont migrer du compartiment A vers le compartiment B, jusqu'à l'établissement d'une situation d'équilibre. En moyenne, le nombre de molécules dans chaque compartiment sera identique. Les époux Ehrenfest se sont intéressés à ce modèle car il permettait d'étudier mathématiquement un paradoxe physique : à l'échelle microscopique, il est possible d'observer un phénomène réversible provenant de la mécanique classique (le déplacement des boules d'une urne à l'autre) ; à l'échelle macroscopique, la théorie de la thermodynamique assure que le phénomène est irréversible l'irréversible macroscopique (tout comme un verre cassé ne peut se réparer de lui même, il n'est pas possible que le gaz, après un moment, s'accumule dans une urne plutôt que l'autre). L'étude (par le biais des chaines de Markov) de l'urne d'Ehrenfest permet de lever ce paradoxe.

Chapitre 10

Produit scalaire, applications géométrique

10.1 Introduction

Bien qu'important en géométrie euclidienne, la notion de produit scalaire apparaît tardivement. Les premières traces de ceci apparaissent dans des travaux, liées à la création de l'ensemble des quaternions, de Hamilton en 1843. Le mathématicien Peano, quant-à lui, le définit à partir d'un calcul d'aire ou de déterminant. Ce ne fut que plus tard encore que les qualités intrinsèques (forme bilinéaire symétrique définie positive) d'un produit scalaire furent identifiées et utilisées comme définition. L'avantage de cette formulation abstraite permet de transposer des résultats géométriques à des espaces abstraits, parfois de dimension infinie (espace de fonction par exemple).

10.2 Définition et expressions d'un produit scalaire

10.2.1 Norme d'un vecteur

Définition 10.2.1. *Si $\overrightarrow{u}$ est obtenu à partir de deux points A et B (i.e. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$) alors la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ correspond à la longueur AB. Ceci se note*

$$\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$$

Lorsque $\|\overrightarrow{u}\| = 1$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ est dit unitaire.

Remarque.

1. L'égalité $\|\overrightarrow{AB}\| = 0$ équivaut à $A = B$.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout vecteur $\overrightarrow{u}$ nous avons $\|\lambda\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{u}\|$. Par exemple,

$$\|3\overrightarrow{u}\| = 3\|\overrightarrow{u}\| \quad \text{et} \quad \|-2\overrightarrow{u}\| = 2\|\overrightarrow{u}\|$$

3. Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ alors

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

10.2.2 Définition d'un produit scalaire

A partir de la norme précédente, il est possible de définir un produit scalaire dans le plan : il s'agit d'associer un nombre réel à deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ données.

Définition 10.2.2. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, le produit scalaire entre ces deux vecteurs est défini par*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Remarque.

1. Attention $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est un nombre réel pas un vecteur.
2. Par convention, lorsque $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, il est possible d'écrire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2$. Il est toutefois préférable de noter $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$ pour éviter les confusions.
3. La définition du produit scalaire montre que si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.
4. Soit $ABCD$ est un parallélogramme, notons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ (ainsi $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$) alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(AD^2 - AB^2 - AC^2\right)$$

10.3 Expression du produit scalaire

Dans certains contextes, il est possible d'obtenir des expressions plus manipulables du produit scalaire.

10.3.1 A l'aide des coordonnées

Proposition 32. *Dans un repère orthonormée, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ alors*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Remarque.

1. En particulier, $\overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2$.
2. Si $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ est une base orthonormée $\big($i.e. $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{j} = (0, 1)\big)$ et $\overrightarrow{u} = (x, y)$ un vecteur quelconque, alors
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{i} = x \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{j} = y.$$
Autrement dit, le produit scalaire d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ avec les vecteurs composant une base du plan permet de retrouver les coordonnées de celui-ci.

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition en observant, dans un premier temps, que $\|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2+x^2$ et $\|\overrightarrow{v}\|^2 = (x')^2+(y')^2$. Puis, dans un second temps, que le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$ et par conséquent

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + (x')^2 + 2xx' + y^2 + (y')^2 + 2yy'$$

Il suffit ensuite, en utilisant la définition de $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, de calculer $\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$ pour conclure. ☐

10.3.2 A l'aide de la norme et d'un angle orienté

Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, il est possible d'exprimer le produit scalaire en fonction de l'angle orientés $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Proposition 33. *Sous les hypothèses précédentes,* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

Remarque. Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, l'expression précédente se simplifie :

- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.

- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens opposé alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

Démonstration. Sans perdre en généralité (quitte à remplacer $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par $\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ et $\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$), il est possible de supposer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient unitaires (i.e. $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$). Plaçons nous dans un repère orthornormée direct de la forme $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{j})$ et posons $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{u}$ ainsi que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v}$.

Il suffit donc de calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}$ dans le repère orthonormée $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{j})$. Pour cela, nous allons utiliser le théorème précédent. Il nous suffit donc de déterminer les coordonnées de ces vecteurs pour ensuite utiliser l'expression du produit scalaire en fonction des coordonnées. Tout d'abord, puisque $\overrightarrow{OA}$ est l'un des vecteurs de base du repère, nous avons

$$\overrightarrow{OA} = (1, 0)$$

Ensuite, par définition des angles orientés $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$ nous avons

$$\overrightarrow{OM} = \big(\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})\,;\, \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})\big) = \big(\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\,;\, \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\big)$$

puisque $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v}$. Ainsi, d'après le théorème précédent

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + 0 \times \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

Ce qui est le résultat souhaité. □

10.4 Règles de calculs

Etant donnés trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ voici quelques règles de calculs permettant de manipuler plus facilement les produits scalaires entre ces derniers.

Proposition 34. *Pour tous vecteurs* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *et tous nombres réels a et b, nous avons*

1. *propriété de symétrie :* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.

2. *propriété de linéarité :*
$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} \quad \textit{et} \quad (a\overrightarrow{u}) \cdot (b\overrightarrow{v}) = (ab) \times \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

Remarque. En particulier, nous avons les conséquences suivantes :

$$(-\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2 \pm 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

Attention, nous rappelons que $\overrightarrow{u}^2$ est une notation pour désigner $\|\overrightarrow{u}\|^2$. Autrement dit, la deuxième conséquence signifie que la norme (au carré) du vecteur $\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}$ s'exprime comme la somme des normes (au carré) des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ plus ou moins le produit scalaire entre ces deux vecteurs.

10.5 Produit scalaire et orthogonalité

Géométriquement le produit scalaire à un lien avec la notion d'orthogonalité.

Définition 10.5.1. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls ; supposons de plus que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$. Dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux signifie que les droite (AB) et (CD) sont perpendiculaires.*

Remarque. Par convention $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tout autre vecteur

Proposition 35 (Orthogonalité et produit scalaire)**.** *Nous avons l'équivalence suivante :*

$$(AB) \perp (CD) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

Démonstration. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$ le résultat est immédiat. Dans le cas contraire, nous avons

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}).$$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont non nuls, il en est de même des normes associées. Ainsi, l'hypothèse $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ entraine que

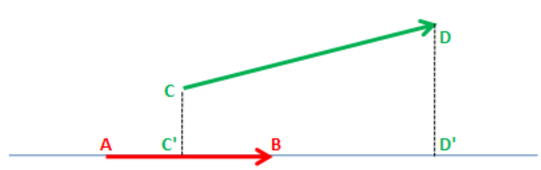
$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

Ceci implique alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux. □

Le procédé de projection orthogonal que nous allons décrire ci-dessus permet de simplifier le calcul d'un produit scalaire entre deux vecteurs.

Définition 10.5.2. *Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan. Dire que les points C' et D' sont les projections orthogonales des points C et D sur la droite (AB) signifie que*

$$(CC') \perp (AB) \quad \textit{et} \quad (DD') \perp (AB).$$



Théorème 36 (Projeté orthogonal)**.** *Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls. Dans ce cas nous avons*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

où C' et D' sont les projections orthogonales des points C et D sur la droite (AB).

Remarque. En résumé, pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ il est possible de remplacer l'un des deux vecteurs par son projeté orthogonal (sur la droite dirigée par le second vecteur).

Démonstration. La démonstration repose sur la décomposition, grâce à la relation de Chasles, suivante :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}$$

qu'il faut combiner avec les règles de calculs de produit scalaire. □

10.6 Applications

Voici deux applications géométriques reposant sur une utilisation du produit scalaire.

10.6.1 Théorème d'Al-Kashi

Il s'agit d'une « généralisation » du théorème de Pythagore. Dans ce qui suit ABC désigne un triangle scalène (quelconque). Selon l'usage, nous posons

$$BC = a, \quad AC = b \quad \text{et} \quad AB = c.$$

Les angles de sommets respectis A, B et C sont notés $\widehat{A}, \widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

Théorème 37 (Al-Kashi)**.** *Soit ABC un triangle scalène alors*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$$

Remarque. En particulier, si ABC est un triangle rectangle en A nous retrouvons l'égalité entre les carrés des longueurs du Théorème de Pythagore. Il est également possible d'échanger le rôle des longueurs a, b et c afin d'obtenir

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{b}) \quad \text{ou} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{c})$$

Ce théorème est notamment utile pour déterminer les mesures des angles $\widehat{A}, \widehat{B}$ et $\widehat{C}$ lorsque les longueurs a, b et c sont connues.

Démonstration. D'après la relation de Chasles, nous avons

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

C'est pourquoi, $b^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$. Or, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = AB \times AC \times \cos(\widehat{A})$ d'où le résultat. □

10.6.2 Théorème de la médiane

Rappelons que la médiane d'un triangle est une droite qui passe pas l'un des sommets de celui-ci et coupe en son milieu le côté opposé.

Théorème 38 (Théorème de la médiane)**.** *Soient ABC un triangle et $I = m[BC]$ alors*

$$b^2 + c^2 = 2AI^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Démonstration. D'après la relation de Chasles, nous avons

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}$$

Donc $b^2 + c^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB})^2 = AI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + AI^2 + IB^2 - 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB}$. Ainsi

$$b^2 + c^2 = 2AI^2 + 2IB^2$$

or $IB = \frac{a}{2}$, d'où le résultat. □

Chapitre 11

Monotonie d'une suite et limite

11.1 Sens de variation d'un suite

11.1.1 Définition

Comme nous l'avons signifié plus tôt, une suite est famille de nombres indexée par des entiers et correspond à un cas particulier de fonctions où n parcours les entiers plutôt que les nombres réels. Tout comme lors de l'étude de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il est possible d'étudier la monotonie d'une suite. Nous allons voir que cette étude est plus simple à mettre en place que l'étude des variations d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que nous avons déjà aborder dans ce cours.

Définition 11.1.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique, une telle suite sera dite*
- *croissante si, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n$.*
- *décroissante si, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} \leq u_n$.*
- *constante si, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n$.*

Remarque. 1. En remplaçant le symbole $\geq$ par $>$ (resp. $\leq$ par $<$) on peut égalemement définir la notion de suite strictement croissante (resp. strictement décroissante).

2. Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.

Exemple 11.1.1. La suite géométrique $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$ de raison $q = \frac{1}{2}$ définie par $t_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \geq 0$ est strictement décroissante.

11.1.2 Etude du sens de variation

Il est à noter que l'étude de la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ consiste à déterminer le signe de

$$u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

Ce taux d'accroissement entre deux termes consécutifs s'apparente à une dérivée discrète.

Lorsque cela à du sens, il est également possible de voir si le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

est supérieur ou inférieur à 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 11.1.2. 1. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \frac{3}{n+2}$, $n \geq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n =& \frac{3}{n+3} - \frac{3}{n+2} \\ =& \frac{3n+6-3n-9}{(n+3)(n+2)} \\ =& -\frac{3}{(n+3)(n+2)} \end{aligned}$$

De plus, puisque $n \in \mathbb{N}$ nous avons immédiatement que $n+2 > 0$ et $n+3 > 0$. Ainsi, nous avons donc montré que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \geq 0$. Ceci signifiant que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est (strictement) décroissante.

2. Si $v_n = \frac{3^{2n+1}}{5^n}$ pour $n \geq 0$ alors, puisque $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit d'étudier le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{2n+3}}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{3^{2n+1}} = \frac{3}{5} < 1$$

donc la suite est décroissante.

Proposition 39 (Monotonie d'une suite arithmétique)**.** *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, alors*

- *si $r > 0$ la suite est strictement croissante ;*
- *si $r < 0$ la suite est strictement décroissante ;*
- *si $r = 0$ la suite est constante.*

Proposition 40 (Monotonie d'une suite géométrique)**.** *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ avec $\mathbf{u_0 > 0}$, alors*

- *si $0 < q < 1$ la suite est strictement décroissante ;*
- *si $q > 1$ la suite est strictement croissante ;*
- *si $q = 1$ la suite est constante.*

Remarque. Si $q < 0$ il n'est pas possible de conclure. Si jamais $\mathbf{u_0 < 0}$, les conclusions des deux premières assertions sont inversées. C'est-à dire :

- si $0 < q < 1$ la suite est strictement croissante ;
- si $q > 1$ la suite est strictement décroissante ;

Lorsqu'un suite est définie de manière explicite par une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, la monotonie de f détermine celle de la suite. Plus précisément

Théorème 41. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie à l'aide d'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par*

$$u_n = f(n) \quad n \geq 0.$$

alors

- *si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante ;*
- *si f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante.*

Remarque. Il est possible de remplacer les mots strictement croissante (resp. strictement croissante) par croissante (resp. décroissante) dans ce qui précède.

Exemple 11.1.3.
1. La fonction affine $f(x) = \frac{x}{2} + 3$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; en conséquence la suite
$$u_n = \frac{n}{2} + 3 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$
l'est également.
2. Si $f(n) = \frac{1}{3}n^3 - 6n^2 + 27n$ pour tout $n \geq 0$. Il suffit d'étudier les variations de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 27x$ sur $\mathbb{R}_+$. Ici, $f'(x) = x^2 - 12x + 27$ et $\Delta > 0$: il y a donc deux racines $x_1 = 3$ et $x_2 = 9$. De plus $a = 1 > 0$, donc $f'(x) \geq 0$ si $x \geq 9$: autrement dit, f est croissante sur l'intervalle $[9; +\infty[$. En conséquence, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante lorsque $n \geq 9$.

Il est important de ne pas chercher à généraliser le théorème précédent aux suites définies par récurrence. L'étude de celles-ci est un peu plus complexes et n'est pas du programme.

Exemple 11.1.4. Considérons les suites

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3 & n \geq 0, \\ u_0 = 8. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{v_n}{2} + 3 & n \geq 0, \\ v_0 = 1. \end{cases}$$

sont bien de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{x}{2} + 3$ une croissante. Cependant, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante tandis que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante.

11.2 Notion de limite

Dans cette section nous nous interrogeons quant au comportement de u_n lorsque n devient de plus en plus grand. Autrement dit que dire de

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = ?$$

Un moment de réflexion suggère que plusieurs cas de figures sont envisageables :

1. Les termes de la suite semblent s'accumuler près d'une valeur : $u_n = \frac{1}{n} + 1$ pour $n \geq 1$.
2. Les valeurs semblent devenir de plus en plus grande : $u_n = 2^n$ pour $n \geq 1$ ou $v_n = -n^2$ pour $n \geq 0$.
3. Les points semblent se disperser dans chaque direction : $u_n = (-1)^n 2^n$ pour $n \geq 0$.

Nous admettrons qu'une limite, lorsqu'elle existe, est unique. Etudions plusieurs situations.

Exemple 11.2.1. Soit $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. L'intuition suggère que u_n se rapproche de plus en plus de zéro lorsque $n \to +\infty$. Pour le démontrer il faut montrer que pour tout intervalle (ouvert) I contenant 0, il est possible de trouver un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont contenu dans I.
Si $I =]0; 10^-3[$ alors il suffit de choisir $N = 10^3+1$. En effet, si $n \geq 10^3+1$ alors $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{10^3+1} \leq \frac{1}{10^3}$. Autrement dit, si $n \geq N$ alors $u_n \in I$. Nous venons de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Observons que la taille de l'intervalle I modifie le choix du rang N : si I était plus grand, nous aurions pu choisir N plus petit et vice versa.

Exemple 11.2.2. Soit $u_n = 3n^2 + 1$ pour $n \geq 1$. L'intuition suggère que u_n se rapproche de $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Nous devons donc montrer que le nombre A choisi (supposé grand), il est possible de trouver un rang N tel que $u_n > A$ à partir de ce rang.

Supposons que $A = 10^6$, alors $u_n > A \iff 3n^2 + 1 > 10^6 \iff n > \sqrt{\frac{10^6-1}{3}}$. Or $\sqrt{\frac{10^6-1}{3}} \equiv 577,35$, il suffit donc de choisir $N = \lfloor\sqrt{\frac{10^6-1}{3}}\rfloor + 1 = 578$ pour que $u_n > A$ si $n \geq N$. Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

A nouveau, N dépend de la valeur de A.

Exemple 11.2.3. Soit $u_n = 3n^2 + 1$ pour $n \geq 1$. L'intuition suggère que u_n se rapproche de $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Nous devons donc montrer que le nombre A choisi (supposé grand), il est possible de trouver un rang N tel que $u_n > A$ à partir de ce rang.

Supposons que $A = 10^6$, alors $u_n > A \iff 3n^2 + 1 > 10^6 \iff n > \sqrt{\frac{10^6-1}{3}}$. Or $\sqrt{\frac{10^6-1}{3}} \equiv 577,35$, il suffit donc de choisir $N = \lfloor\sqrt{\frac{10^6-1}{3}}\rfloor + 1 = 578$ pour que $u_n > A$ si $n \geq N$. Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

A nouveau, N dépend de la valeur de A.

Exemple 11.2.4. Soit $u_n = (-1)^n n^2$ pour $n \geq 0$. Le calculs de quelques termes de la suite suggère qu'elle se disperse vers $+\infty$ et vers $-\infty$. Il est donc naturel de penser que la limite n'existe pas. Pour cela, nous allons étudier des sous-suites de $(u_n)_{n\geq 0}$. Ici, nous allons étudier séparement la suite des termes paires $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et la suite des termes impaires $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ pour montrer que celles-ci ont des limites différentes. Par unicité de la limite, cela impliquera que la suite initiale $(u_n)_{n\geq 0}$ ne peut converger.

Observons que $u_{2n} = 4n^2$ et qu'il est possible de montrer que $4n^2 \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. De plus $u_{2n+1} = -(2n+1)^2 = -(4n^2+n+1)$ et cette suite converge vers $-\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} \neq \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}$$

donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas.

Remarque. Lorsque la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, il n'est pas possible de trouver des sous-suites (comme les termes paires ou impaires étudiés ci-dessus) qui converge vers une autre limite $l' \in \mathbb{R}$. En fait, dans ce cas précis, toutes les sous-suites convergent vers la même limite l.

Chapitre 12

Loi Binomiale

12.1 Loi de Bernoulli

12.1.1 Epreuve de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1]$, une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire comportant deux issues : un succès de probabilité p et un échec de probabilité $1 - p$. Cette expérience peut se représenter à l'aide d'un arbre pondéré.

Exemple 12.1.1.

1. Jeu de pile ou face dans lequel on appelle succès le fait d'obtenir pile est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

2. Un sac contient 10 boules, indiscernables au touché, numérotées de 1 à 10. L'expérience aléatoire consiste à tirer une boule du sac. Le joueur gagne si le numéro est inférieur ou égale à 3. Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle le succès est « obtenir un numéro inférieur à 3 »de probabilité $p = \frac{3}{10}$; l'échec est l'évènement « obtenir un numéro strictement supérieur à 3 »sa probabilité vaut $1 - 0,3 = 0,7$.

Définition 12.1.1. *Considérons une épreuve de Bernoulli et désignons pas X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec. La loi de X est alors donné par les probabilités suivantes :*

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Il est usuel de dire que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p et nous noterons ceci par $X \sim B_e(p)$.

12.1.2 Schéma de Bernoulli

Un schéma de Bernoulli est la répétition d'une même épreuve de Bernoulli de façon indépendante (il est supposé que le résultat d'une épreuve n'affecte pas le résultat des autres).

Exemple 12.1.2. Un sac contient 5 boules, indiscernables au touché, 3 rouges et 2 bleues. Le joueur tire successivement et avec remise 2 boules du sac (on remet la boule obtenue dans le sac après chaque tirage). Le joueur gagne si la boule obtenue est bleue.

Ici, l'épreuve de Bernoulli consiste à trier une boule du sac ; le succès correspond à obtenir « une boule blueu »avec $p = \frac{2}{5}$. Cette épreuve est répétée deux fois de façon indépendantes (puisque les tirages sont avec remise). Il s'agit d'un schéma de Bernoulli.

Propriétés 2.

- Un schéma de Bernoulli est représenté par un arbre pondéré.
- Sur chaque branche de l'arbre est écrite la probabilité associée.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur les branches. Il est donc important de savoir utiliser l'arbre pour calculer des probabilités. Par exemple, La probabilité d'obtenir exactement une boule bleue correspond aux issues RB et BR. La probabilité de ces chemins vaut

$$\mathbb{P}(RB) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(BR) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

  donc $\mathbb{P}(\text{obtenir exactement une boule bleue}) = \frac{12}{25}$.

12.2 Loi Binomiale

Considérons un schéma de Bernoulli dans laquelle l'épreuve de Bernoulli est réalisée n fois (par exemple $n = 4, 5, 10, 100, \ldots$) et dont la probabilité de succès vaut p. Nous allons voir étudier la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès (parmi les n répétitions). Avant cela, il faut introduire quelques notions de dénombrements.

12.2.1 Variable aléatoire

Désignons par X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès lors des répétitions d'un schéma de Bernoulli. Ainsi $X \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$. L'évènement « obtenir k succès »s'écrit $\{X = k\}$ et $\mathbb{P}(X = k)$ désigne la probabilité d'obtenir k succès.

Exemple 12.2.1. Supposons que l'on fasse 20 pile ou face et que l'on désigne le succès par « obtenir pile ». Sur $n = 20$ répétitions, X compte le nombre de pile obtenu, ainsi $X \in \{0, 1, \ldots, 20\}$.

Définition 12.2.1. *Dans le cadre décrit ci dessus, il est usuel de dire X suit un loi binomiale de paramètres n et p (noté $X \sim B(n, p)$). De plus, la loi de X est donnée par la famille des probabilités suivantes :*

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \textit{pour tout} \quad 0 \leq k \leq n.$$

où les nombres $\binom{n}{k}$ (cette notation se lit « k parmi n ») sont appelés coefficients binomiaux.

Remarque. Les coefficients binomiaux sont obtenus à l'aide de la calculatrice. Lorsque que l'on représente un schéma de Bernoulli à l'aide d'un arbre pondéré (avec les événements S pour le succès et S^c pour l'échec), $\binom{n}{k}$ dénombre les chemins contenant exactement à k succès parmi les n répétitions.

La formule précédente semble compliquée, il n'en est rien. Reprenons l'exemple du sac rempli de billes bleues et rouges.

Exemple 12.2.2. Nous avons une répétitions de $n = 2$ épreuves de Bernoulli indépendantes. L'épreuve sous jacente consistait à appeler succès le fait d'obtenir une boule bleue et $p = \frac{2}{5}$. Si X compte le nombre de succès obtenu dans ce schéma de Bernoulli alors $X \sim B(2, \frac{2}{5})$. Nous avions calculé la probabilité d'obtenir exactement 1 bille bleue. Autrement dit,

$$\mathbb{P}(X = 1) = \binom{2}{1} p(1 - p) = 2 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5}$$

De manière plus intuitive : $p(1 - p)$ désigne la probabilité d'un chemin contenant exactement 1 succès et $\binom{2}{1}$ compte combien de chemin est-il possible d'obtenir en choisissant 1 succès parmi les deux répétitions.

Les coefficients binomiaux vérifient certaines propriétés remarquables.

Théorème 42 (Symétrie et formule de Pascal)**.**

1. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$ alors*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n - 1$ alors*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Remarque. Le triangle de Pascal permet facilement de calculer les coefficients binomiaux et permet de trouver les coefficients apparaissant dans les identités remarquables $(a + b)^n$.

12.2.2 Espérance, variance et écart-type d'une loi binomiale

Proposition 43. *Si $X \sim B(n; p)$ (avec $n \in \mathbb{N}_*$ et $p \in [0; 1]$) alors*

1. *l'espérance (analogue de la moyenne) de X vaut $\mathbb{E}[X] = np$.*

2. *la variance de X vaut $\mathrm{Var}(X) = np(1 - p)$.*

3. *L'écart type de X vaut $\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{np(1 - p)}$.*

12.2.3 Nombres factoriels et coefficient binomiaux

Cette partie, bien qu'abordable au lycée, est hors programme. Elle permet cependant de définir convenablement les coefficients binomiaux.

Supposons que nous ayons à disposition un mot de k lettres distinctes et que nous souhaitions savoir combien d'anagrammes est-il possible de former avec ses lettres.

Exemple 12.2.3. Si le mot est ZOE, alors $k = 3$ et il y a 6 possibilités :

$$ZOE \quad ZEO \quad EZO \quad EOZ \quad OZE \quad OEZ.$$

Nous venons de compter le nombre de permutations possibles des trois lettres Z, E et O.

Définition 12.2.2. *Soit k un nombre entier, le nombre de permutation d'un alphabet à k lettres distinctes vaut*

$$k! = k \times (k-1) \times (k-2) \times (k-3) \times \ldots 3 \times 2 \times 1$$

avec pour convention $0! = 1$. *Le nombre $k!$ se lit k* factoriel.

Remarque. Observons que $k! = k \times (k-1)!$.

Exemple 12.2.4. Avec le mot ZOE nous avons $k = 3$ et $k! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

Les nombres factoriels permettent de définir les coefficients binomiaux. Imaginons que nous ayons une liste de 20 DVD dans un sac et que nous souhaitions en choisir 3 parmi cette liste. Combien de selections (dont l'ordre des DVD importe peu) est-il possible de faire ? La réponse à ceci est le nombre suivant.

Définition 12.2.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$ alors le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (lire k parmi n) vaut*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple 12.2.5. Pour répondre à notre question précédente concernant les sélections de 3 DVD parmi 20 il faut donc calculer $\binom{20}{3}$:

$$\frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{6 \times 17!} = 20 \times 19 \times 3 = 1140$$

Chapitre 13

Equation cartésienne de droites et de cercles

13.1 Droite et produit scalaire

13.1.1 Vecteur normal à une droite

Définition 13.1.1. *Dire qu'un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est normal à une droite d signifie que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de d.*

Remarque. En conséquence de ceci, nous avons les faits suivants :

1. étant donnés, quatre points distincts du plan,

$$(AB) \perp (CD) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

2. Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à d et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de d, nous avons

   - $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de toute droite d' perpendiculaire à d.

   - $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal à toute droite d' perpendiculaire à d

3. Soient d et d' deux droites ayant respectivement $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ pour vecteurs normaux, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ pour vecteurs directeurs :

$$d \perp d' \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u'} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{n} \text{ et } \overrightarrow{u'} \text{ sont colinéaires}$$

13.1.2 Vecteur normal et équation de droite

Dans un repère orthonormé, il est possible de retrouver des équations cartésiennes de droites à l'aide d'un vecteur normal.

Proposition 44. *Une droite d a pour une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ (avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$) si et seulement si $\overrightarrow{n} = (a, b)$ est un vecteur normal à d.*

Remarque. En conséquence de ceci nous avons le fait suivant. Soient d et d' d'équations cartésiennes respectives :

$$d\ :\ ax+by+c=0 \quad \text{et} \quad a'x+b'y+c'=0$$

Nous avons alors l'équivalence suivante : $d \perp d' \iff aa'+bb'=0$.

13.2 Cercle et produit scalaire

Dans ce qui suit, nous nous nous plaçons dans un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

13.2.1 Equation d'un cercle défini par son centre et son rayon

Définition 13.2.1. *L'équation cartésienne d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(x_0;y_0)$ et de rayon r est*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Remarque. Observons qu'il s'agit simplement d'une reformulation de $M(x;y)$ est un point du cercle $\mathcal{C}$ équivaut à $IM^2=r^2$.

Exemple 13.2.1. L'équation $(x+1)^2+(y-2)^2=12$ est celle d'un cercle de centre $I(-1;2)$ et de rayon $r=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

13.2.2 Equation d'un cercle défini par son diamètre

Il est également possible de définir un cercle à partir de l'un de ses diamètres $[AB]$.

Proposition 45. *M est un point du cercle $\mathcal{C}$ équivaut à $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.*

Remarque. Ce résultat permet d'obtenir l'équation d'un cercle à partir de deux de ses points, diamétralement opposés, A et B.

Exemple 13.2.2. Soient $A(1;1)$ et $B(-2;3)$ sont les extrémités d'un diamètre d'un cercle $\mathcal{C}$ et déterminons une équation de celui-ci. Soit $M(x;y)\in\mathcal{C}$, d'après le résultat précédent il suffit de calculer $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$. Ici, nous avons

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(1-x)(-2-x)+(1-y)(3-y)=x^2+y^2+x-3y+4$$

D'où, l'équation de $\mathcal{C}$ est : $x^2+y^2+x-4y+1=0$. Il est important de vérifier au moins une fois qu'il s'agit bien d'une équation de cercle :

$$x^2+y^2+x-4y+1=0 \quad \iff \quad (x+\frac{1}{2})^2+(y-2)^2-\frac{13}{4}=0$$

Il s'agit bien de l'équation d'un cercle de rayon $\frac{\sqrt{13}}{2}$ et de centre $C(-\frac{1}{2};2)$.

Remarque. Tout cercle admet une équation de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$ mais la réciproque est fausse.

Chapitre 14

Echantillonage

Procédons à quelques rappels de seconde.

14.1 Echantillon

Pour avoir une meilleur intuition de ceci, voici quelques exemples.

Exemple 14.1.1.
- Lancer 100 fois un dé et noter la liste des résultats obtenus.
- Prélever 100 ampoules d'une chaine de fabrication. Tester, puis noter à chaque fois si elles sont conforme ou non.
- Interroger 100 personnes au hasard et noter à chaque fois leur couleur préférée.
- ...

Dans les trois situations précédentes, nous avons noter les résultats d'une expérience aléatoire qui a été répété $n = 100$ fois de manière indépendante.

Définition 14.1.1. *Un échantillon de taille n est la liste de n résultats obtenues lors de n répétitions indépendantes de la même expérience aléatoire.*

Remarque. Lorsque l'expérience aléatoire ne présente que deux issues possibles (obtenir pile ou face, gagner ou perdre, etc ...), il est usuel de parler d'épreuve de Bernoulli.

En pratique nous faisons face à une liste de valeurs à partir desquelles nous pouvons déterminer la fréquence d'apparition des différentes issues de l'expérience.

Exemple 14.1.2. Si nous avons à disposition un échantillon de taille $n = 1000$ contenant les résultats obtenus après avoir effectuer des piles ou faces. Supposons que nous ayons obtenu 531 fois l'issue pile, cela signifie que la fréquence observée de l'issue « pile » vaut $f = \frac{531}{1000} = 0,531$.

D'un point de vue théorique, si la pièce équilibrée, nous savons également que $\mathbb{P}(pile) = \frac{1}{2}$. De plus, la loi forte des grands nombres de Kolmogorov nous assure que plus la taille de l'échantillon augmente plus la fréquence observé f se rapproche de la valeur théorique $\mathbb{P}(pile)$. Nous allons voir de quelle manière ce résultat peut servir pour à établir des tests en statistiques.

14.2 Estimation et intervalle de fluctuation

Supposons que nous ayons à disposition un échantillon de taille n à disposition. A l'aide de cette échantillon, il est possible de déterminer de manière empirique la fréquence d'apparition d'un certain caractère f. Il est alors naturel de se demander comment estimer la valeur théorique associé à ce caractère. Voyons plutôt sur un exemple :

Exemple 14.2.1. Toujours avec l'exemple du pile ou face. Nous pourrions chercher à estimer la valeur théorique $\mathbb{P}(pile) = p \in [0; 1]$ (a priori nous ne savons pas si la pièce est équilibrée ou non) à l'aide d'un échantillon et des fréquences observées.

Une réponse acceptable serait de dire : la valeur théorique p se trouve dans un intervalle I (qui dépendrait de la taille de l'échantillon n et de la fréquence observée f) et cette affirmation se fait avec une marge d'erreur de 5%. Le théorème suivant apporte une réponse à cette problématique.

Théorème 46. *Supposons que nous ayons à disposition un échantillon vérifiant les hypothèses suivantes :*

1. *la taille de l'échantillon est suffisamment grande : $n \geq 25$;*

2. *la probabilité théorique p vérifie $p \in [0, 2; 0, 8]$.*

Alors, avec un risque de 5%, l'intervalle $I_n = [f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ contient la valeur théorique p. L'intervalle I_n est appelé intervalle de fluctuation.

Voyons, à l'aide d'exemples, ce que ce théorème permet de dire. Dans un premier temps, traitons une question d'estimation d'une quantité inconnue p.

Exemple 14.2.2. Les 10000 employés d'une entreprise sont consultés sur la nouvelle couleur du sigle de celle-ci : vert ou rouge. Inquiète du résultat, la direction, qui a fait campagne pour la couleur rouge, a interrogé un échantillon de 100 employés sur leur choix et 54% ont répondu rouge.

Voyons ce qu'il est possible d'en conclure. Ici, $n = 100$ et p est un nombre inconnu (correspondant à la véritable proportion de personnes ayant choisi rouge). La fréquence observée vaut $f = 0, 54$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0, 1$. Ainsi, l'intervalle de fluctuation associé à p est de la forme

$$I_n = [0, 44; 0, 64]$$

D'après le théorème précédent, il y a donc de très grandes chances (au moins 95%) pour la proportion réelle p de personnes ayant choisi la couleur rouge se trouve dans cet intervalle. Il n'est cependant pas possible de savoir quelle couleur va l'emporter car les deux situations peuvent se produire ($p < \frac{1}{2}$ ou $p > \frac{1}{2}$).

Dans un second temps, nous allons voir que ce théorème peut servir de test.

Exemple 14.2.3. Supposons que nous souhaitions vérifier qu'un dé est truqué ou non et que nous ayons à disposition un échantillon de 2500 lancers. Si le dé n'est pas truqué, il y a autant de chances d'obtenir un nombre pair qu'un nombre impair : i.e. $\mathbb{P}(pair) = p = \frac{1}{2}$. Supposons que nous ayons une échantillon de 2500 lancers et une fréquence observée (du nombre de résultats pairs obtenus sur les 2500 lancers) valant $f = \frac{1150}{2500} = 0, 46$.

Les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites et celui-ci nous assure que l'intervalle de fluctuation (contenant la valeur théorique p) est

$$I_n = [0,48; 0,52]$$

puisque $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{50} = 0,02$. En outre, nous observons que $f \notin I$. En conclusion, avec une erreur de 5%, nous pouvons dire que l'hypothèse : « le dé est équilibré » n'est pas vraie.

Nous allons poursuivre cette étude de tests statistiques en utilisant (de manière implicite) les propriétés de la loi binomiale (qui est sous entendu dans le contexte ci-dessus).

14.3 Test statistiques et loi binomiale

De manière générale, nous faisons face à la situation suivante : au sein d'une population, nous supposons qu'un certain caractère vaut $p \in [0,1]$. Nous souhaiterions juger cette hypothèse. A cet effet, nous prélevons (parmi la population) un échantillon de taille n dans lequel le caractère en question est présent avec une fréquence valant f. Qu'est-il possible de décider ? Au vu des observations, devons-nous accepter l'hypothèse portant sur p ou la rejeter ? Quelle est l'erreur alors commise ?

Autrement dit, si A est l'évènement d'intérêt nous faisons face au test suivant :

$$H_0 \, : \, \mathbb{P}(A) = p \quad \text{ou} \quad H_1 \, : \, \mathbb{P}(A) \neq p \tag{14.3.1}$$

et nous cherchons à utiliser les données prélevées (i.e. la fréquence f) pour trancher.

Remarque. Bien entendu, de manière sous-jacente, nous avons affaire avec une loi binomiale (dont la probabilité du succès vaut $\mathbb{P}(A) = p$ et le nombre de répétitions correspond à la taille de l'échantillon).

Exemple 14.3.1. Un exemple simple permettant d'illustrer le problème précédent est l'étude de l'équilibre d'une pièce. Supposons que nous cherchions à déterminer si une pièce est équilibrée (i.e. $\mathbb{P}(Face) = \mathbb{P}(pile) = \frac{1}{2}$). Dans les faits nous ignorons la valeur de $\mathbb{P}(Face) = p \in [0,1]$ et cherchons à savoir si $p = \frac{1}{2}$ (la pièce est équilibrée) ou non.

Pour cela, il suffit de procéder à certain nombre n de lancer, de noter les résultats obtenus pour obtenir la fréquence f du nombre de pile. A partir de cette valeur f nous souhaitons ensuite trancher entre l'alternative : « la pièce est équilibrée »ou « la pièce n'est pas équilibrée ».

Nous allons voir que l'utilisation de la loi binomiale permet d'éviter les restrictions imposées en seconde (i.e. la valeur théorique p ne doit être ni trop proche de 0 ni trop proche de 1 et n doit être suffisamment grand). Afin d'obtenir une règle de décision, permettant de trancher lors d'un test. Nous avons besoin de la définition d'un « intervalle de fluctuation »associée à une loi binomiale.

Définition 14.3.1. *L'intervalle de fluctuation (avec un seuil d'erreur de* 5%*) d'une fréquence, sur un échantillon aléatoire de taille n suivant une loi binomiale* $B(n,p)$ *est :*

$$I_n = \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right] \quad \textit{avec} \quad \left\{ \begin{array}{ll} a \, : \, \textit{le plus petit entier tel que} & \mathbb{P}(X \leq a) > 0,025 \\ b \, : \, \textit{le plus petit entier tel que} & \mathbb{P}(X \leq b) \geq 0,975 \end{array} \right.$$

avec $X \sim B(n;p)$.

Remarque. L'obtention de cet intervalle de fluctuations n'impose pas des restrictions sur la taille de p et de n. Lorsque ces conditions sont vérifiées les intervalles I_n obtenus sont sensiblement les mêmes.

Nous avons alors la règle de décision suivante (qui découle du Théorème de Moivre-Laplace) qui apporte une solution au problème (14.3.1).

Proposition 47 (Règle de décision)**.** *Nous avons l'alternative suivante :*

1. *si $f \in I_n$ alors l'hypothèse H_0 est acceptée avec une erreur de* 5%*.*

2. *si $f \notin I_n$ alors l'hypothèse H_0 est rejetée avec une erreur de* 5%*.*

Remarque. D'un point de vu pratique, les tests statistiques sont plutôt là pour servir à rejeter des hypothèses plutôt que les accepter. Cela revient à dire : si je modélise mon aléa pour une certaine loi de probabilité, est-ce que les fréquences observées sont réalistes ou non ?

En pratique, il convient donc de trouver, à l'aide d'une table ou de la calculatrice, les valeurs de a et b en fonction des données n et p (sa valeur supposée). Puis de voir si la fréquence observée f appartient ou non à l'intervalle I_n.