Chapitre 2

Trigonométrie et angles orientés

2.1 Cercle trigonométrique et mesure d'angle

Définition 2.1.1. *Un cercle trigonométrique* $\mathcal{C}$ *est un cercle de rayon* 1 *sur lequel nous distinguerons deux sens de parcours :*

- *le sens direct lorsque le cercle est parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;*
- *le sens indirect lorsque le cercle est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.*

Remarque. Les mesures suivantes seront utiles par la suite : la longueur d'un cercle vaut 2π, celle du demi-cercle vaut donc π et celle d'un quart de cercle vaut $\frac{\pi}{2}$.

Le cercle trigonométrique permet d'introduire une nouvelle unité de mesure d'angles : le radian.

Définition 2.1.2. *Le radian, noté* rad, *est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur le cercle* $\mathcal{C}$ *un arc de longueur* 1.

Remarque. Il y a une relation de proportionnalité entre les degrés et les radians. En effet, nous savons que la relation suivante est vérifiée

$$360 \quad \text{degrés équivaut à} \quad 2\pi\text{rad} \quad \text{(la longueur du cercle trigonométrique)}$$

C'est pourquoi nous avons le tableau suivant :

Degrés	360	d
Radian	2π	r

Ce tableau de proportionnalité nous fournit la relation suivante $180 \times r = d \times 2\pi$ qui permet de convertir des degrés en radian et vice-versa.

Les valeurs remarquables suivantes sont à connaitre

Degrés	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

2.2 Angles orientés

Nous allons voir qu'il est possible d'orienter le plan et d'utiliser le cercle trigonométrique pour associer la mesure d'un angle entre deux vecteurs non nuls. A cet effet, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. A partir du centre O du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, il existe deux points du plan M et N tels que

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{ON} = \vec{v}$$

De plus, observons que les demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ coupent le cercle en des points A et B. La longueur l, sur le cercle $\mathcal{C}$, entre les points A et B va permettre de définir la mesure de l'angle θ formé entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition 2.2.1. *Dans le contexte précédent, la famille des nombres réels $l + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, est une mesure de l'angle orienté θ.*

Remarque. De manière informelle, le nombre k indique le nombre de tour (du cercle trigonométrique) qui a été fait. En pratique, nous allons souvent confondre un angle avec l'une de ses mesures. Notons aussi que le sens de parcours est important (sens direct ou indirect) est important. En effet, si $(\vec{u}, \vec{v}) = l$ alors $(\vec{v}, \vec{u}) = 2\pi - l$.

Le fait qu'il soit possible d'associer plusieurs valeurs à une même portion du cercle trigonométrique peut s'expliquer de la manière suivante : imaginons que nous puissions reproduire la droite réelle $\mathbb{R}$ de sorte qu'elle passe par le point I du repère et soit perpendiculaire à l'axe des abscisses, si nous « enroulons » ensuite cette droite autour du cercle la répétition devient alors évidente.

2.2.1 Mesure principale d'un angle orienté

Certains mesures sont plus simples à utiliser que d'autres.

Définition 2.2.2. *Parmi les mesures $l + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, il en existe une et une seule appartenant à l'intervalle $I =]-\pi; \pi]$. Cette mesure s'appelle la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$.*

Remarque. La valeur absolue de la mesure principale d'un angle coïncide avec l'angle géométrique défini par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les autres mesures de cet angle sont obtenu en rajoutant des « tours de cercle » : si $(\vec{u}, \vec{v}) = l$ alors toutes les autres mesures de cet angle sont de la forme $l + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Voyons ce que nous obtenons sur deux exemples.

Exemple 2.2.1. 1. Supposons que $\theta = \frac{37}{6}\pi$ et déterminons la mesure principale de cet angle orienté. Pour cela, il suffit d'observer que

$$\frac{37\pi}{6} = \frac{6 \times 6 + 1}{6}\pi = (6 + \frac{1}{6})\pi = \frac{\pi}{6} + 3 \times 2\pi\,;$$

la mesure principale est donc $\frac{\pi}{6}$.

2. De manière similaire, si $\theta = \frac{202\pi}{3}$ nous avons

$$\frac{202\pi}{3} = \frac{67 \times 3 + 1}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + 67\pi\,;$$

ici, il faut poursuivre un peu nos calculs afin de faire apparaitre un multiple de 2π à la place de 67π. Cela s'effectue de la manière suivante

$$67\pi = 68\pi - \pi,$$

ainsi $\frac{\pi}{3} + 67\pi = \frac{\pi}{3} + 68\pi - \pi = -\frac{2\pi}{3} + 34 \times 2\pi$. La mesure principale vaut donc $-\frac{2\pi}{3}$ et l'angle géométrique associé a pour mesure $\left| -\frac{2\pi}{3} \right| = \frac{2\pi}{3}$.

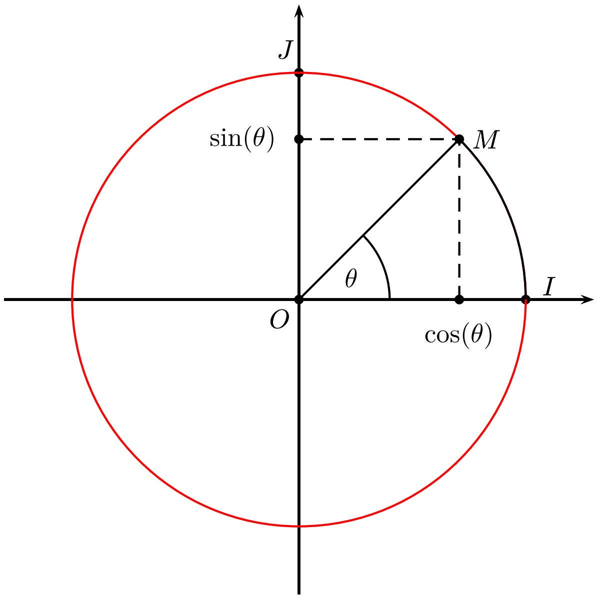
2.3 Fonction cosinus et sinus d'un angle orienté

Pour introduire ces nouvelles fonctions, il est important de se placer dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ direct ; si $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$ ceci signifie que

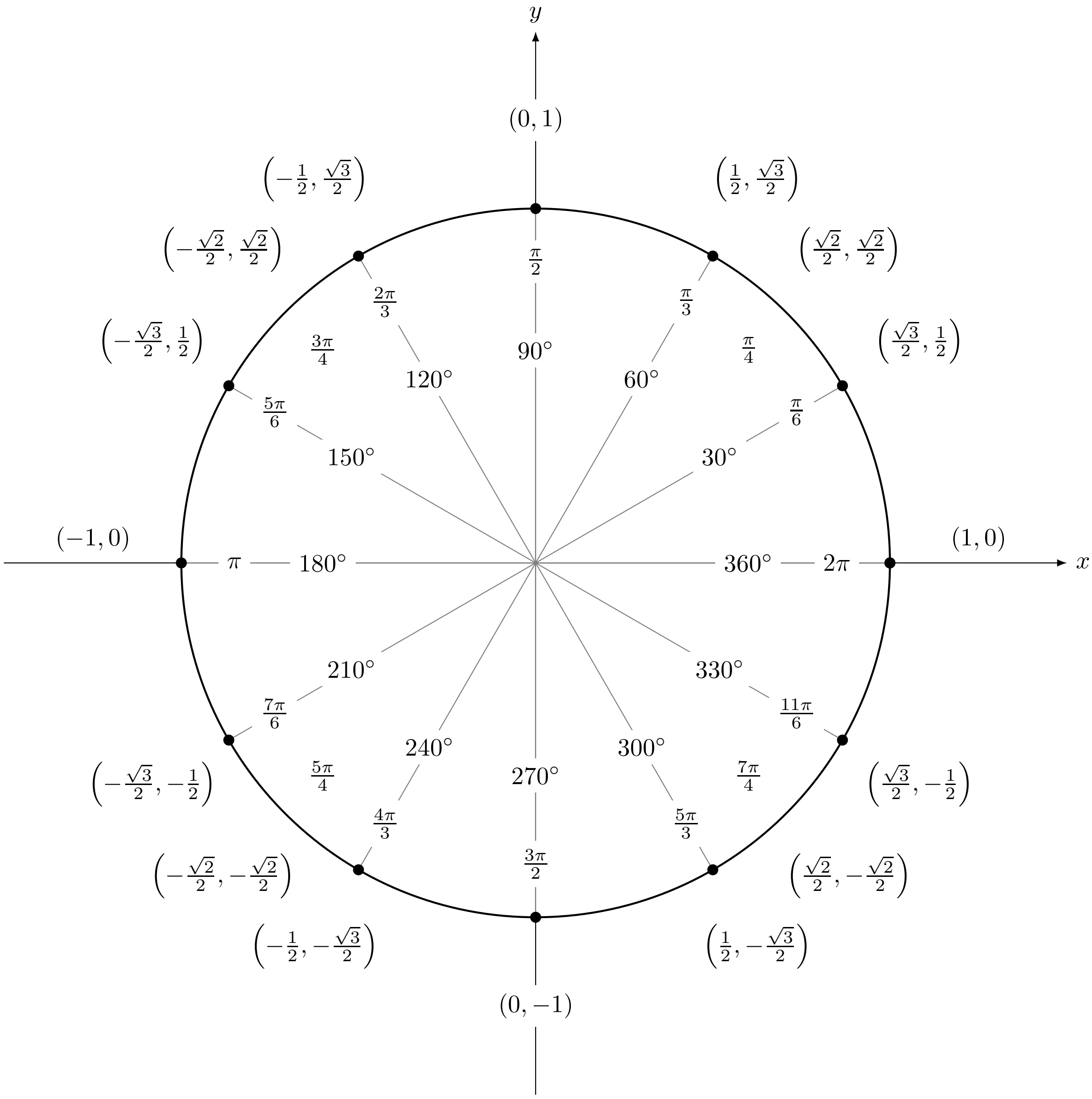
$$\| \overrightarrow{i} \| = \| \overrightarrow{j} \| = 1 \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = \frac{\pi}{2}$$

Définition 2.3.1. *Dans un tel cadre, à tout points M appartenant au cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O, nous associons les quantités suivantes :*

- *nous noterons θ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$;*
- *le cosinus de θ, noté $\cos(\theta)$, correspondra à l'abscisse du point M ;*
- *le sinus de θ, noté $\sin(\theta)$, correspondra à l'ordonnée du point M.*



Voyons quelques propriétés de ces nouvelles fonctions. Tout d'abord, il est important de calculer quelques valeurs remarquables de ces fonctions.



Sur la figure précédente, l'abscisse de chaque point fourni la valeur du cosinus de l'angle correspondant et l'ordonnée la valeur du sinus. Par exemple, le point $M(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ permet de savoir que

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Il est essentiel de retenir les valeurs suivantes.

θ (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Démonstration. Voyons comment montrer que $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pour cela, plaçons nous dans un triangle rectangle isocèle (ainsi, les angles à la base sont égaux et valent $\frac{\pi}{4}$) de côté 1. En utilisant le théorème de Pythagore dans ce triangle (ou en observant que l'hypoténuse de ce dernier correspond à la diagonale d'un carré de côté 1), nous obtenons que l'hypoténuse vaut $\sqrt{2}$. Par suite, les formules de trigonométrique vues au collège nous assure que

$$\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pour déterminer la valeur de $\sin(\frac{\pi}{3})$ et $\cos(\frac{\pi}{3})$, il suffit de considérer un triangle équilatéral de côté 1. Dans celui-ci, il faut ensuite tracer une hauteur et se souvenir que, dans un triangle équilatéral, celle-ci coïncide avec une médiatrice. Par suite, cette hauteur coupe le côté opposé en son milieu. Si b désigne la longueur de cette hauteur, le théorème de Pythagore nous assure que b vérifie l'identité suivante

$$1^2 = (\frac{1}{2})^2 + b^2$$

Donc $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pour conclure, il ne reste plus qu'à employer les formules classiques de trigonométrie. A cet effet, rappelons que

$$\cos(\theta) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}.$$

□

Les autres valeurs peuvent être retrouvées de manière élémentaire à l'aide d'arguments géométriques que nous allons décrire ci-dessous.

2.3.1 Propriétés des fonctions trigonométriques

Proposition 4. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ les identités suivantes sont satisfaites :*

- $\cos(x) \in [-1; 1]$ *et* $\sin(x) \in [-1; 1]$,
- $\cos(x + k2\pi) = \cos(x)$ *et* $\sin(x + k2\pi) = \sin(x)$, *ces fonctions sont dites 2π- périodiques,*
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Remarque. Graphiquement, le fait que les fonctions trigonométriques soient 2π périodique signifie qu'il est possible de reconstruire la courbe en connaissant seulement son tracé sur un intervalle de longueur 2π.

Voici les propriétés géométriques dont nous parlions plus tôt. Il en existe encore d'autres mais nous ne les aborderons pas dans ce cours.

Proposition 5. *Pour tout réel x, nous avons*

- *(Autour du cosinus)* $\cos(x) = \cos(-x)$ *et* $-\cos(x) = \cos(x - \pi) = \cos(x + \pi)$.
- *(Autour du sinus)* $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ *et* $-\sin(x) = \sin(-x) = \sin(\pi + x)$.
- *(Relation entre les deux)* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ *et* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$.

Remarque. Certaines de ces propriétés se traduisent de manière graphique :

- le fait que $\cos(-x) = \cos(x)$ signifie que la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est paire. Son graphe admet donc une symétrique axiale par rapport à l'axe des ordonnées.
- le fait que $\sin(-x) = -\cos(x)$ signifie que la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est impaire. Son graphe admet donc une symétrique centrale centrée en l'origine.

A toute fin utile mentionnons également les formules d'additions suivantes :

Proposition 6. *Soient a, b deux réels alors*

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b) \quad \textit{et} \quad \sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$

2.4 Equations trigonométriques

Enfin, pour conclure ce chapitre, il faudra résoudre des équations de la forme

$$\cos(x) = u \quad \text{ou} \quad \sin(x) = u \quad \text{avec} \quad u \in [-1; 1]$$

Autrement dit, lorsque u est une valeur donnée, il faut trouver l'ensemble des réels x satisfaisant les équations précédentes. Pour résoudre, ceci nous avons le résultat suivant

Proposition 7. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons les relations suivantes :*

- $\cos(x) = \cos(a) \iff \{x = \pm a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- $\sin(x) = \sin(a) \iff \{x = a + 2k\pi \quad \textit{ou} \quad x = \pi - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque. En pratique pour résoudre $\cos(x) = u$ il faudra d'abord trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(a) = u$ pour ensuite appliquer le résultat précédent. Ce genre d'équations sera très important l'année prochaine lorsque vous étudierez les nombres complexes.

2.5 Exercices potentiels

- Conversion : exercice $9, 12p218$

- Mesures principales : exercices $13, 14page218$
- Graphiquement : exercices $20, 22p219$.
- Equations, inéquations : exercices $41, 43, 47p221$.

2.6 Pour aller plus loin

Les fonctions trigonométriques sont très importantes en mathématiques. Elles apparaissent naturellement lors de l'étude de la fonction $x \mapsto \exp(x)$; ce point sera entamé en classe de première et poursuivi en terminale.

Ce genre de fonction joue un rôle essentiel dans la théorie inventé par J. Fourier $(1768 - 1830)$. Dans cette théorie, ce mathématicien français s'est demandé s'il était possible de décomposer une fonction (vérifiant certaines hypothèses) afin de l'exprimer comme somme (infinie) de fonction trigonométrique. De manière formelle, Fourier s'est demandé à quelles conditions est-il possible d'écrire l'identité suivante

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}?$$

Ce type de questionnement à permis de résoudre de manière élégante de nombreux problèmes. Citons-en deux pour l'exemple :

1. Plaçons dans le plan et supposons que nous ayons à disposition une corde (fermée) de longueur fixée $l \in \mathbb{R}$. Lorsque cette corde est déposée dans le plan, elle entoure une région de celui-ci auquel il devient possible d'associer une aire. Une question très ancienne est alors la suivante : quelle est l'objet géométrique (définie par la corde) admettant l'aire maximale ? Il s'agit du problème isopérimétrique euclidien ; ce dernier admet de nombreuses généralisation très intéressantes.

2. Ces fonctions trigonométriques interviennent également dans la résolution de l'équation de la chaleur. Cette dernière modélise de quelle manière la chaleur se diffuse dans une barre métallique (dont les extrémités seraient chauffées). Contrairement aux équations que vous avez l'habitude de rencontré, une solution de l'équation de la chaleur n'est pas un nombre mais une fonction (laquelle décrit de quelle manière la chaleur se propage dans la barre de fer) et il est possible d'exprimer celle-ci à l'aide des fonctions trigonométriques.

Les idées de Fourier furent fécondes et donnèrent lieu à de nombreuses extensions (la transformée de Fourier par exemple) et permirent de résoudre de nombreux problèmes d'équations aux dérivées partielles dont l'équation de la chaleur est un exemple.

2.7 Bilan du chapitre

- Conversion radian-degrés

- Mesures principales d'un angle orienté

- Connaitre les propriétés essentielles des fonctions trigonométriques ainsi que leurs représentations graphiques.

- Résoudre equations, inéquations.