# Introduction au calcul stochastique

Kevin Tanguy
Lille, France

2 septembre 2020

## Table des matières

# 1 Avant-propos

Ce cours a pour objectif d'introduire la notion d'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien. L'exposition suit le livre [8] en omettant par moments certains détails techniques. Les résultats principaux du cours sont la formule d'Itō et ses conséquences ; la notion d'équations différentielles stochastiques est également introduite. Certaines applications sont tirées du cours *Martingales et calcul stochastique* de Nils Berglund dans lequel des exercices sont proposés. Le lecteur est supposé avoir déjà suivi un cours d'intégration, de probabilité et d'analyse hilbertienne.

# 2 Préambule

Tout au long de ce cours, nous allons étudier des propriétés ou des constructions associées au mouvement Brownien. Il existe de nombreuses manières de justifier l'existence de ce processus stochastique. Il est classique de l'obtenir comme objet limite dans l'espace des fonctions continues $C^0[0,1]$ via le théorème de Donsker ; il est également possible de le construire à la main à l'aide d'ondelettes et de variables aléatoires gaussiennes standards indépendantes (cf. [8, 6, 5, 3]). Nous ne nous attarderons pas sur cet aspect et allons rapidement passer en revue quelques propriétés de ce nouvel objet, les démonstrations sont laissées en exercices.

Dans ce qui suit, $B = (B_t)_{t\in[0,1]} \in C^0[0,1]$ désignera un mouvement brownien.

**Proposition 2.1.**

1. *Les trajectoires $t \mapsto B_t$ du mouvement brownien sont continues et $B(0) = 0$ p.s..*

2. *Ce processus est à accroissements indépendants. Autrement dit, pour tout $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_d \leqslant 1$ les variables aléatoires*
$$B_{t_1},\, B_{t_2} - B_{t_1},\, B_{t_3} - B_{t_2}, \ldots, B_{t_d} - B_{t_{d-1}} \quad \textit{sont mutuellement indépendantes.}$$

3. *Pour tout $s < t$, $B_t - B_s$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $s - t$. Nous noterons ceci par*
$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, s-t).$$

4. *$(B_t)_{t\in[0,1]}$ est un processus gaussien : pour tout d-uplet $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_d \leqslant 1$,*
$$(B_{t_1},\, B_{t_2}, \ldots B_{t_d}) \sim \mathcal{N}_d(0, \Gamma)$$
*avec $\Gamma_{ij} = \min(t_i, t_j)$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant d$.*

5. *$(B_t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale continue pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ où $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s,\, s \leqslant t)$ est la tribu engendrée par le processus jusqu'à l'instant $t$. Autrement dit,*

   *(a) $\mathbb{E}[B_t|B_s] = B_s$ pour tout $s < t$ ;*
   *(b) pour tout $t \geqslant 0$, $B_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable ;*
   *(c) pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbb{E}[|B_t|] < \infty$.*

Bien sûr, la liste ne s'arrête pas là (cf. [8, 6, 5, 3]) et il est possible d'exposer de nombreuses autres propriétés que nous n'aborderons pas ici.

Comme nous allons l'expliquer, le but de ce cours est de construire une notion d'intégrale par rapport à $B_t$ afin d'obtenir simplement de nouvelles martingales.

# 3 Introduction

Durant des études de mathématiques, il est plutôt traditionnel d'étudier deux types d'intégrales : celle de Riemann, puis celle de Lebesgue qui est plus souple d'emploi et beaucoup plus générale. Dans ce qui suit $\lambda_d$ désignera la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ (parfois, nous utiliserons aussi les notations suivantes : $d\lambda_d = dx_1 \ldots dx_d$). Concernant ces deux thématiques, le lecteur est renvoyé aux ouvrages suivants : [7, 4, 9].

Comme toujours, lors de la construction de tels objets, il est important de définir leurs valeurs sur une classe de fonctions suffisamment simples avant d'espérer atteindre des fonctions plus complexes par un argument de prolongement. Dans le cas de la mesure de Lebesgue $\lambda_1$, il faut donc définir la valeur de l'intégrale de Lebesgue sur des fonctions étagées. En particulier, il faut expliquer comment traiter l'intégrale de fonctions de la forme $1_{[a,b[}$ pour $a < b$ deux nombres réels. Ici, nous avons

$$\lambda_1\big([a,b[\big) = b - a.$$

En y pensant ce choix est arbitraire. En effet, étant donnée une fonction $x \mapsto F(x)$ vérifiant certaines conditions (que nous préciserons ultérieurement) nous aurions pu poser

$$\lambda_1\big([a,b[\big) = F(b) - F(a).$$

Avec un tel choix, la construction de l'intégrale se poursuit sans changement majeur et mène à l'intégrale de Lebesgue-Stieljes via la mesure $dF$. Pour que ce qui précède ait du sens il faut que $F$ soit à variation bornée et continue à droite.

**Définition 3.1.** *Soit $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ avec $T > 0$. Pour toute subdivision $\pi = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de l'intervalle $[0,T]$, définissons $V(f,\pi)$ par :*

$$V(f,\pi) = \sum_{i=1}^{n} \big|f(x_{i-1}) - f(x_i)\big|.$$

*Nous appelons variation totale de $f$ sur $[0,T]$ le réel $V_T(f)$ défini par :*

$$V_T(f) = \sup_{\pi} V(f,\pi).$$

*où le supremum est pris sur l'ensemble des subdivisions $\pi$ de l'intervalle $[0,T]$. La fonction $f$ est dite à variation bornée si cette borne supérieure $V_T(f)$ est finie.*

*Remarque.* Il existe une caractérisation des fonctions à variations bornées (cf. [7]). En effet, nous avons l'équivalence suivante :

1. $F$ est une fonction à variation bornée.
2. Il existe deux fonctions croissantes $\phi$ et $\psi$ telles que $F = \phi - \psi$.

En particulier, une fonction monotone est à variation bornée.

Finalement, l'un des exemples les plus commun d'intégrale de Lebesgue-Stieljes peut se trouver dans la théorie des probabilités via les fonctions de répartition. En effet, si $X$ est une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, nous avons, pour tout $a < b$ appartenant au support de $X$,

$$\mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \int_{[a,b[} d\mathbb{P}_X = \int_{[a,b[} dF = F(b) - F(a).$$

En particulier, si $F$ est dérivable et que $f$ désigne la densité de probabilité de la variable aléatoire $X$ par rapport à la mesure de Lebesgue (i.e. $dF = f dx$) nous aurons $\int_{[a,b[} dF = \int_{[a,b[} f dx$.

A présent, nous souhaiterions donner un sens à la quantité aléatoire suivante :

$$\int_0^T f(\omega, t) dB_t \quad \text{pour un certain} \quad T > 0.$$

Pour l'instant, ce souhait doit sembler curieux. Tentons de motiver une telle étude.

Comme nous l'avons rapidement vu, le mouvement brownien vérifie de nombreuses propriétés. Il s'agit notamment d'une martingale (à temps continu). Puisque la théorie des martingales permet de résoudre efficacement de nombreux problèmes tout en autorisant de la dépendance, il pourrait alors être fructueux de construire de nouvelle martingales à partir du mouvement brownien et espérer que celles-ci conservent certaines de ses propriétés.

Lorsque nous avons affaire à des martingales à temps discrets $(M_n)_{n \leqslant 1}$, il est assez simple de fabriquer de nouvelles martingales. Plus précisément, si $(M_n)_{n \leqslant 1}$ est une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \leqslant 1}$ et $(A_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires non-anticipantes (i.e. $A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$), il est possible de définir

$$\tilde{M}_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k (M_k - M_{k-1}) \tag{3.1}$$

puis d'observer que $(\tilde{M}_n)_{n \geqslant 1}$ est encore une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 1}$. La présence des accroissements $(M_k - M_{k-1})_{k \geqslant 1}$ fait penser à une version discrète d'une intégrale (par analogie avec les sommes de Riemann). Il semble alors naturel, en temps continu, de chercher à donner un sens à

$$I(f)(w) = \int_0^T f(w, t) dB_t \quad \text{avec} \quad \omega \in \Omega$$

lorsque $f$ vérifie certaines hypothèses, afin d'obtenir un nouvelle martingale $I(f)$ à partir du mouvement brownien $(B_t)_{t \geqslant 0}$.

Une première approche serait d'essayer d'utiliser le schéma de construction des mesures de Stieljes. En particulier, cette approche fonctionnerait si nous pouvions établir que le mouvement brownien est une fonction monotone (via un calcul de dérivée par exemple). Voyons ce qu'il est possible de dire des propriétés de régularités des fonctions aléatoires

$$t \mapsto B_t(\omega) \quad \text{pour tout} \quad \omega \in \Omega.$$

Par construction, cette fonction est continue *p.s.*, peut-on dire mieux ? Avant cela, rappelons une définition permettant de quantifier la régularité d'une fonction.

**Définition 3.2.** *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite $\alpha$-höldérienne, avec $0 < \alpha \leqslant 1$, si pour $x, y \in \mathbb{R}$, il existe $C_\alpha > 0$ telle que*

$$|f(x) - f(y)| \leq C_\alpha |x - y|^\alpha.$$

Concernant le mouvement brownien, il est possible de montrer le résultat suivant (cf. [6, 8])

**Théorème 3.1.** *1. Pour tout $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, les trajectoires sont p.s. $\alpha$-hölderienne.*

*2. Si $\alpha > \frac{1}{2}$, p.s. les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas $\alpha$-hölderienne.*

*Remarque.* Une conséquence de ceci est que, p.s., $t \mapsto B_t$ n'est pas différentiable. Le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ est plus délicat et est traité dans un résultat de Lévy, nous renvoyons le lecteur vers [6, 8] pour plus de détails.

En particulier, le mouvement brownien n'est dérivable nul part (cf. [6]). Pire encore, il est possible de montrer qu'il n'est pas à variation bornée. L'approche de Stieljes ne pourra donc pas fonctionner et nous allons donc devoir trouver une autre manière de construire notre intégrale stochastique. Pour cela, nous allons suivre l'exposition faite dans l'excellent livre [8].

# 4 Approche hilbertienne de l'intégrale d'Itō

Bien que, pour l'instant, la construction de l'intégrale stochastique ne soit que partiellement motivée nous allons donner un sens à la quantité suivante

$$I(f)(\omega) = \int_0^T f(t, w) dB_t.$$

Nous verrons ultérieurement de quelle manière cette intégrale peut servir à répondre à des problèmes complexes. En résumé, la construction va être faite de la manière suivante :

- nous allons définir l'intégrale stochastique sur une classe de fonctions suffisamment simples ;
- ensuite, nous allons utiliser un argument de prolongement par densité pour étendre cette définition à des objets plus complexes.

Bien entendu, cette démarche est systématique lorsque nous voulons construire une intégrale. En effet, rappelons le, pour l'intégrale de Lebesgue, nous définissons celle-ci sur des fonctions étagées et nous montrons que les fonctions mesurables (qui sont les fonctions d'intérêts) peuvent-être approchées, par densité, par des fonctions étagées.

### 4.0.1 Cadre de travail

Tout d'abord, il semble naturel d'imposer certaines conditions de régularité pour l'intégrand $f$.

**Définition 4.1.**
1. *L'ensemble $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}$ désigne la plus petite tribu qui contient les ensembles $A \times B$ avec $A \in \mathcal{F}_t$ (la filtration induite par le mouvement brownien $(B_t)_{t\in[0,1]}$) et $B \in \mathcal{B}$ où $\mathcal{B}$ est la tribu des boréliens de l'ensemble $[0,1]$.*
2. *Lorsque $\omega \mapsto f(\omega, t) \in \mathcal{F}_t$, pour tout $t \in [0,1]$, nous dirons que $f$ est adaptée.*

Nous allons naturellement imposer que la fonction $f(\cdot,\cdot)$ soit mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}$ et adaptée.

Dans la première étape de la construction de l'intégrale stochastique nous allons nous focaliser sur l'ensemble $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2[0,T]$ qui rassemble toutes les fonctions mesurables adaptées et qui vérifient la condition d'intégrabilité suivante

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(\omega,t)dt\right] < \infty.$$

Il est essentiel d'observer que $\mathcal{H}^2$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert $L^2(d\mathbb{P}\times dt)$.

### 4.0.2 1ère étape

Prenons une fonction simple appartenant à l'ensemble $\mathcal{H}^2$, par exemple $f(w,t) = 1_{[a,b]}(t)$ avec $[a,b] \subset [0,T]$. Il semble naturel d'imposer l'identité suivante :

$$I(f)(\omega) = \int_a^b dB_t = B_b - B_a.$$

De plus, puisqu'une intégrale doit vérifier une propriété de linéarité, nous devons être capable de traiter de manière similaire les fonctions de la forme

$$f(\omega,t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) 1_{t_i < t \leqslant t_{i+1}}$$

où $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ est une subdivision de l'intervalle $[0,T]$ et $(a_i)_{i=0,n-1}$ sont des variables aléatoires vérifiant les conditions suivantes :

$$a_i \in \mathcal{F}_{t_i} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[a_i^2] < +\infty \quad \text{pour tout} \quad i = 0,\ldots,n-1.$$

Nous désignerons par $\mathcal{H}_0^2$ le sous-ensemble de $\mathcal{H}^2$ qui contient toutes les fonctions de cette forme. Poursuivons à présent notre construction, si $f \in \mathcal{H}_0^2$ nous devons imposer l'identité suivante

$$I(f)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}). \tag{4.1}$$

Nous allons voir dans la section suivante que l'application $I : \mathcal{H}_0^2 \to L^2(d\mathbb{P})$ est une application continue (et linéaire, par construction). Ceci laisse penser qu'il sera éventuellement possible d'étendre, par densité, notre définition (4.1) de l'intégrale stochastique à l'espace $\mathcal{H}^2$ tout entier.

## 4.1 Isométrie d'Itō

Le lemme suivant sera d'une importance crucial pour construire l'intégrale d'Itō sur $\mathcal{H}^2$.

**Lemme 4.1** (Isométrie d'Itō)**.** *pour toute fonction $f \in H_0^2$, nous avons l'identité suivante :*

$$\|I(f)\|_{L^2(d\mathbb{P})} = \|f\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} \tag{4.2}$$

*Démonstration.* Soit $f \in \mathcal{H}_0^2$, celle-ci s'écrit

$$f(t,\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) 1_{t_i < t \leqslant t_{i+1}}$$

ainsi $f^2(t,\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2(\omega) 1_{t_1 < t \leqslant t_{i+1}}$. A présent, calculons séparément les deux normes apparaissant dans l'égalité (4.2). Par ce qui précède,

$$\|f\|^2_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} = \mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(t,\omega)dt\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[a_i^2](t_{i+1} - t_i).$$

Pour calculer $\|I(f)\|_{L^2(d\mathbb{P})}$, observons que $a_i$ est indépendant de $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ pour tout $i = 0, \ldots, n-1$. C'est pourquoi les termes croisés, intervenant dans l'expression de $I^2(f)$, sont d'espérance nulle. En définitive, en utilisant à nouveau l'indépendance de $a_i$ avec $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, nous avons

$$\begin{aligned} \|I(f)\|^2_{L^2(d\mathbb{P})} = \mathbb{E}[I(f)^2] &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[a_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[a_i^2]\mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[a_i^2](t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

car $B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, (t_{i+1} - t_i))$ pour tout $i = 0, \ldots, n-1$ (cf. proposition 2.1). □

A la suite de ce lemme, comme annoncé, il apparait donc que $I : \mathcal{H}_0^2 \to L^2(d\mathbb{P})$ est isométrie. En conséquence, il s'agit aussi d'une application continue. Plus important encore, puisqu'une isométrie préserve les distances, l'application $I$ envoi une suite de Cauchy de $\mathcal{H}_0^2$ sur une suite de Cauchy de $L^2(d\mathbb{P})$. Voyons comment ceci permet de prolonger par densité l'intégrale d'Itō à l'espace $\mathcal{H}^2$.

Pour cela, nous allons admettre le lemme suivant (cf. [8]). Bien que sa démonstration n'est pas très difficile, la présentation de celle-ci à ce moment de l'exposition n'ajouterait que des difficultés techniques qui ne seraient d'aucune aides pour comprendre la construction de l'intégrale d'Itō. Nous préférons donc l'omettre et renvoyer le lecteur vers l'ouvrage adéquat. Le procédé que nous allons décrire ci-dessous est en tout point semblable au prolongement de la transformée de Fourier dans $L^2$.

**Lemme 4.2.** *Le résultat de densité suivant est satisfait :* $\overline{\mathcal{H}_0^2} = \mathcal{H}^2$*. Autrement dit, pour toute fonction* $f \in \mathcal{H}_2$*, il existe* $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{H}_0^2$ *telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} = 0$$

Le prolongement de $I$ à l'espace $\mathcal{H}^2$ se fait donc comme suit : pour $f \in \mathcal{H}^2$ posons

$$I(f) = \lim_{n\to+\infty} I(f_n) \tag{4.3}$$

avec $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite fournie par le Lemme 4.2. Il faut à présent vérifier certains points pour s'assurer que la définition précédente de $I$ sur $\mathcal{H}^2$ n'est pas ambiguë.

1. Tout d'abord, $I(f)$ doit exister comme limite de $I(f_n)$ dans $L^2$.

   Montrons alors que la convergence de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers $f$ dans $L^2(d\mathbb{P}\times dt)$ entraine que $\big(I(f_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge vers un élément (que nous noterons $I(f)$) dans $L^2(d\mathbb{P})$. Supposons donc que $\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} = 0$, cela signifie que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy de $L^2(d\mathbb{P}\times dt)$. En conséquence, puisque $I$ est une isométrie, $\big(I(f_n)\big)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy de $L^2(d\mathbb{P})$. Cet espace métrique étant complet, il existe un élément de $L^2(d\mathbb{P})$, noté $I(f)$, tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \|I(f_n) - I(f)\|_{L^2(d\mathbb{P})} = 0.$$

2. La définition ne doit pas dépendre de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{H}_0^2$. Considérons alors $(g_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{H}_0^2$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|g_n - f\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} = 0$$

   afin de montrer que $I(g_n)$ et $I(f_n)$ admettent la même limite dans $L^2(d\mathbb{P})$. Pour cela, il suffit d'observer que

$$\|f_n - g_n\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} \leqslant \|f_n - f\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} + \|f - g_n\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)}.$$

   d'où, $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - g_n\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} = 0$. Il suffit ensuite d'utiliser l'isométrie d'Itō pour conclure. En effet, celle-ci fournit l'égalité suivante

$$\|I(f_n) - I(g_n)\|_{L^2(d\mathbb{P})} = \|f_n - g_n\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)}.$$

Tout ce qui précède nous permet alors d'étendre l'intégrale d'Itō à l'espace $\mathcal{H}^2$.

**Théorème 4.1.** *Soit* $f \in \mathcal{H}^2$*, alors* $\|I(f)\|_{L^2(d\mathbb{P})} = \|f\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)}$

*Démonstration.* Considérons une fonction $f \in \mathcal{H}^2$. Par densité, il existe une suite $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{H}_0^2$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} = 0$. Puisque l'inégalité triangulaire nous assure que

$$\big|\|f_n\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} - \|f\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)}\big| \leqslant \|f_n - f\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)},$$

nous en déduisons donc que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} = \|f\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)}$. De plus, l'isométrie d'Itō nous assure que $\|I(f_n)\|_{L^2(d\mathbb{P})} = \|f_n\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)}$. En conséquence, les arguments précédents permettent également de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \|I(f_n)\|_{L^2(d\mathbb{P})} = \|I(f)\|_{L^2(d\mathbb{P})}.$$

Par unicité de la limite, nous avons donc $\|I(f)\|_{L^2(d\mathbb{P})} = \|f\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)}$. □

L'intégrale d'Itō est à présent définie sur l'espace $\mathcal{H}^2$, nous allons à présent étudier certains propriétés de cette nouvelle intégrale. Pour l'instant le choix de la terminologie peut sembler étrange puisque $I(f)$ n'est rien d'autre qu'une variable aléatoire, ce point s'éclaircira plus tard dans le cours.

## 4.2 Intégrale d'Itō et processus stochastiques

Voyons de quelle manière l'application $I : \mathcal{H}^2 \to L^2(d\mathbb{P})$ permet d'obtenir, à partir du mouvement brownien, des martingales à temps continu. Pour cela, il va être primordial d'obtenir des processus à partir du mouvement brownien et pas seulement une variable aléatoire.

Tentons d'introduire la variable du temps dans notre précédente construction. Dans une démarche pédagogique notre première approche sera erronée et nous verrons ensuite quel artifice est nécessaire pour arriver à nos fins. Il semble naturel de procéder comme suit :

fixons $t \in [0,T]$ et considérons la fonction $m_t \in \mathcal{H}^2$ définie par

$$\begin{cases} 1 & \text{si} \quad s \in [0,t] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'intérêt d'un tel objet est le suivant : si $f \in \mathcal{H}^2$ alors $m_t f \in \mathcal{H}^2$ et en conséquent $I(m_t f)$ est bien définie comme un élément de $L^2(d\mathbb{P})$. Il est alors tentant de dire que $\tilde{X}_t(\omega) = I(m_t f)(\omega)$ est le processus désiré. Il faut cependant être plus prudent et moins hâtif. En effet, pour tout $t \in [0,T]$, $I(m_t f) \in L^2(d\mathbb{P})$. C'est pourquoi la valeur de $I(m_t f)$ peut-être choisie de manière arbitraire sur tout ensemble $A_t \in \mathcal{F}_t$ de mesure nulle. Autrement dit, la définition de $I(m_t f)$ est ambiguë sur l'ensemble $A_t$. Si jamais l'ensemble $[0,T]$ était dénombrable cela ne poserait aucun problème, malheureusement pour nous ce n'est pas le cas et nous pourrions obtenir un objet dont la définition est ambiguë pour tout $\omega \in \Omega$. Cette première tentative n'est donc pas satisfaisante.

Fort heureusement, tout n'est pas perdu et il est possible de compléter notre raisonnement précédent afin d'obtenir le processus que nous cherchions : nous allons construire la martingale $(X_t)_{t\in[0,T]}$ désirée telle que

$$\mathbb{P}\big(X_t = I(m_t f)\big) = 1 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T].$$

**Théorème 4.2.** *Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}^2$, il existe un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *il s'agit d'une martingale à temps continu par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ *du mouvement brownien ;*
2. *pour tout* $t \in [0,T]$, $\mathbb{P}\big(\omega\ :\ X_t(\omega) = I(m_t f)(\omega)\big) = 1$.

*Démonstration.* Soit $f \in \mathcal{H}^2$ et considérons $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{H}_0^2$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} = 0.$$

Observons ensuite que $m_t f_n \in \mathcal{H}_0^2$, ceci nous permet de définir $X_t^{(n)}(\omega) = I(m_t f_n)(\omega)$ avec $\omega \in \Omega$. De plus, puisque $m_t f_n$ est un élément de $\mathcal{H}_0^2$

$$i.e.\quad m_t f_n(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) 1_{t_i<t\leqslant t_{i+1}}, \quad \text{avec} \quad a_i \in \forall i = 0,\dots,n-1$$

nous avons une formule explicite de l'intégrale d'Itō : pour tout $t_k < t \leqslant t_{k+1}$

$$X_t^{(n)}(\omega) = a_k(\omega)(B_t - B_{t_k}) + \sum_{i=0}^{k-1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

En particulier, cette expression permet facilement de voir que $X_t^{(n)}$ est une martingale continue $\mathcal{F}_t$-adaptée (d'après (3.1)). En particulier, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $n \geqslant m$, l'inégalité maximale de Doob (cf. 10.1) dans $L^2$ entraine que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}\big[|X_T^{(n)} - X_T^{(m)}|^2\big] &= \frac{1}{\epsilon^2}\|I(m_T f_n) - I(m_T f_m)\|^2_{L^2(d\mathbb{P})} \\ &= \frac{1}{\epsilon^2}\|f_n - f_m\|^2_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} \end{aligned}$$

d'après l'isométrie d'Itō.

A présent, il est possible de tirer profit du fait que $f_n$ tend vers $f$ dans $L^2(d\mathbb{P}\times dt)$. Cette convergence permet de choisir une suite croissante $(n_k)_{k\geqslant 1}$ telle que

$$\max_{n\geqslant n_k} \|f_n - f_{n_k}\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} \leqslant 2^{-2k}.$$

D'où, en choisissant $\epsilon = 2^{-k}$ (avec $k \geqslant 1$) dans ce qui précède, nous avons montré que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| \geqslant \epsilon\right) \leqslant 2^{-k}.$$

C'est pourquoi, le lemme de Borel-Cantelli (cf. 10.1) nous assure qu'il existe un ensemble $\Omega_0$ de probabilité 1 ainsi qu'une variable aléatoire (finie sur $\Omega_0$) $\omega \mapsto C(\omega)$ telle que, pour tout $\omega \in \Omega_0$,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |X_t^{(n_{k+1})} - X_t^{(n_k)}| \leqslant 2^{-k}, \quad \text{pour tout} \quad k \geqslant C(\omega).$$

En outre, puisque $2^{-k}$ est sommable, l'inégalité précédente nous assure aussi que pour tout $\omega \in \Omega_0$, la suite $(X_t^{(n_k)}(\omega))_{k\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $\big(C[0,T], \|\cdot\|_\infty\big)$. D'où l'existence, pour tout $\omega \in \Omega_0$, d'une fonction continue $t \mapsto X_t(\omega)$ tel que

$$\lim_{k\to+\infty} \|X_t^{(n_k)}(\omega) - X_t(\omega)\|_\infty = 0.$$

Montrons à présent que $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale par rapport à la filtration du mouvement brownien. Ceci découle du fait suivant : la martingale $\mathcal{F}_t$-adaptée $(X_t^{(n_k)})_{t\in[0,T]}$ converge vers $(X_t)_{t\in[0,T]}$ dans $L^2(d\mathbb{P})$, ainsi la propriété de martingale voulue (pour $(X_t)_{t\in[0,T]}$) est obtenue à partir de celle satisfaite par $(X_t^{(n_k)})_{t\in[0,T]}$ (cf. (3.1)).

Il ne reste plus qu'à démontrer le dernier point du théorème. A cet effet, observons que $m_t f_{n_k}$ converge vers $m_t f$ dans $L^2(d\mathbb{P}\times dt)$ ; c'est pourquoi, via l'isométrie d'Itō, $I(m_t f_{n_k})$ converge vers $I(m_t f)$ dans $L^2(d\mathbb{P})$. Or, nous savons aussi que

$$\lim_{k\to+\infty} X_t^{(n_k)} = \lim_{k\to+\infty} I(m_t f_{n_k}) = X_t \quad \text{dans} \quad L^2(d\mathbb{P}).$$

Ainsi, par unicité de la limite dans $L^2(d\mathbb{P})$, nous avons que $\|X_t - I(m_t f)\|_{L^2(d\mathbb{P})} = 0$ pour tout $t \in [0,T]$. Il s'agit précisément de l'argument dont nous avions besoin pour justifier que pour tout $t \in [0,T]$, $\mathbb{P}\big(\omega : X_t(\omega) = I(m_t f)(\omega)\big) = 1$. $\square$

Voyons à présent comment calculer l'intégrale d'Itō sur un exemple simple.

## 4.3 Calcul explicite

Il est temps de faire un premier calcul afin d'avoir un peu plus d'intuition sur ces nouveaux objets. Voyons ce qu'il est possible de dire pour l'exemple particulier $f(\omega,s) = B_s \in \mathcal{H}^2$. Nous allons montrer que

$$X_t = I(m_t f) = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t, \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T]. \tag{4.4}$$

Plus tard, lorsque nous serons plus à l'aise avec ces nouveaux objets, nous utiliserons la notation suivante

$$X_t = \int_0^t f(s,\omega)dB_s$$

qui sera un moyen commode pour désigner l'intégrale d'Itō de la fonction $f$. Il est important de saisir qu'il ne s'agit que d'une notation, en aucun cas nous avons donné un sens, trajectoire par trajectoire, à cet objet.

### 4.3.1 Au niveau de la variance et de l'espérance

Les calculs qui vont suivre sont ici pour forger notre intuition, rien de plus. Ils ne sont pas nécessaires pour déterminer l'expression de $X_t$. Dans ce qui suit $t \in [0,T]$ est fixé.

D'une part, $\mathbb{E}[X_t] = 0$ puisque l'intégrale d'Itō fournie une martingale centrée (par construction). D'autre part, puisque $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, nous avons $\frac{1}{2}\mathbb{E}[B_t^2 - t] = 0$. Jusqu'ici, les deux objets sont donc centrés tout les deux.

Traitons à présent la variance de chacun des membres de l'equation (4.4). Pour le membre de gauche, nous allons utiliser l'isométrie d'Itō. Celle-ci nous assure que

$$\mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t B_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t B_s^2 ds\right] = \frac{1}{2}t^2$$

où la dernière égalité est obtenue, à l'aide du théorème de Fubini-Tonelli en échangeant l'intégrale et l'espérance. Quant au membre de droite, nous obtenons (toujours au niveau de la variance)

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{4}B_t^4 - \frac{t}{2}B_t^2 + \frac{1}{4}t^2\right] = \frac{1}{2}t^2.$$

En effet, rappelons que lorsque $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors $\mathbb{E}[X^4] = 3\sigma^2$. Les moments d'ordre deux coïncident donc également.

### 4.3.2 Démonstration rigoureuse

La seule façon de procéder est d'utiliser le fait que $f(\omega, s) = B_s(\omega) \in \mathcal{H}^2$ et de revenir à la définition de l'intégrale d'Itō et de faire à la main le schéma de preuve que nous avons mis en place dans la section présentant l'isométrie d'Itō.

Tout d'abord déterminons une suite $(f_n)_{n\geqslant 0} \subset \mathcal{H}_0^2$ approchant $f$ dans $L^2(d\mathbb{P} \times dt)$. A cet effet, choisissons une subdivision $(t_i)_{i=0,\ldots,n}$ de l'intervalle $[0,T]$ définie par $t_i = \frac{iT}{n}$ et posons $f_n(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} 1_{t_i < t \leqslant t_{i+1}}$. Observons ensuite que, d'une part, $f_n \in \mathcal{H}_0^2$ et $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} = 0$ d'autre part. En effet, grâce au théorème de Fubini nous avons

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)}^2 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \sum_{i=0}^{n-1} (B_t - B_{t_i})^2 1_{t_i < t \leqslant t_{i+1}}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i) dt \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 = \frac{1}{2}\frac{T^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

En conséquence, nous avons aussi $\|m_t(f_n - f)\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ pour les versions tronquées. Soit $k_n(t) = k(t) = \max_{i=0,\ldots,n}\{\, t_{i+1} \leqslant t\}$ alors, par définition,

$$\int_0^t B_s dB_s = I(m_t f) = \lim_{n\to+\infty} I(m_t f_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i\leqslant k(t)} B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + B_{k(t)+1}(B_t - B_{k(t)+1})\right).$$

Soyons prudent sur la signification des égalités ci-dessus. Elles sont à comprendre *p.s.* avec des limites prises dans $L^2(d\mathbb{P})$. Dans ce qui suit, nous allons étudier le membre de droite afin de montrer que celui-ci converge vers $\frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$.

Traitons d'abord le dernier terme de la somme et montrons qu'il converge vers 0 dans $L^2(d\mathbb{P})$. Pour cela, il suffit d'observer que, par indépendance,

$$\mathbb{E}\big[B_{k(t)+1}^2(B_t - B_{k(t)+1})^2\big] = t_{k(t)+1}(t - t_{k(t)+1}) \leqslant t \times \frac{T}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Traitons à présent le reste de la somme. Pour $i \leqslant k(t)$ observons que

$$B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \frac{1}{2}(B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2) - \frac{1}{2}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2.$$

Ceci permet alors de faire apparaitre une somme télescopique. En conséquence de ce qui précède, nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty} I(m_t f_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} B_{t_{k(t)+1}}^2 - \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\leqslant k(t)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$$

La première limite vaut $\frac{1}{2}B_t^2$ puisque $t_{k(t)+1} \underset{n\to+\infty}{\to} t$. Il faut donc montrer que la deuxième limite converge vers $t$ lorsque $n \to +\infty$. Pour cela, adoptons la notations suivante

$$Y_n = \sum_{i\leqslant k(t)} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1. \tag{4.5}$$

Tout d'abord, $\mathbb{E}[Y_n] = k(t)\frac{T}{n}$ puisque $B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$ pour tout $i \leqslant k(t)$. D'où

$$\big|\mathbb{E}[Y_n] - t\big| = \big|k(t)\frac{T}{n} - t\big| \leqslant \frac{2T}{n}.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[Y_n] = t$. Notons de plus le fait suivant : puisque $\mathbb{E}[(B_t - B_s)^4] = 3(t-s)^2$ pour tout $0 < s < t$, nous avons $\mathrm{Var}\big((B_t - B_s)^2\big) = 3(t-s)^2 - (t-s)^2 = 2(t-s)^2$ pour tout $0 < s < t$. C'est pourquoi, par indépendance des termes intervenant dans la somme,

$$\mathrm{Var}(Y_n) = 2k(t)\left(\frac{T}{n}\right)^2 \leqslant 2t \times \frac{T}{n}.$$

En conséquence, $Y_n \underset{n\to+\infty}{\to} t$ dans $L^2(d\mathbb{P})$.

Comme nous venons de le voir, les calculs permettant de déterminer $\int_0^t B_s dB_s$ sont longs et fastidieux. Il faudrait trouver une méthode plus souple et plus pratique. En fait, il est assez naturel de se poser les questions suivantes :

1. Serait-il possible d'avoir une version analogue du théorème fondamental de l'analyse ? Celui-ci est bien commode pour calculer des intégrales classiques à l'aide des fonctions dérivées, il serait utile d'avoir une version probabiliste de ce résultat pour faire de même avec l'intégrale d'Itō.

2. Nous venons de construire l'intégrale d'Itō sur l'espace $\mathcal{H}^2$, il n'est pas difficile de voir qu'une fonction aussi simple et régulière que $f(x) = e^{x^4}$ n'appartient pas à cet espace. En effet, la condition suivante n'est pas satisfaite

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(B_t)dt\right] < +\infty$$

puisque $\mathbb{E}[e^{X^4}] = +\infty$ pour toute variable gaussienne $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Pourrait-il être possible d'étendre l'intégrale d'Itō, quitte à relâcher certaines contraintes, à un espace plus grand afin de considérer de telles fonctions ?

Nous allons d'abord répondre à cette deuxième question dans la section suivante.

# 5 Extension de l'intégrale d'Itō

Pour pouvoir inclure un plus grand nombre de fonctions, il va falloir revoir à la baisse nos exigences. L'espace naturel pour atteindre ce but est le suivant.

**Définition 5.1.** *L'espace $\mathcal{L}^2_{\text{loc}} = \mathcal{L}^2_{\text{loc}}[0,T]$ est composé des fonctions $f : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ mesurables, adaptées telles que*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T f^2(\omega, t)dt < \infty\right) = 1.$$

*Remarque.* Il est évident que $\mathcal{H}^2 \subset \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$. De plus, si $g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors la continuité du mouvement brownien entraine que $f(\omega, t) = g(B_t) \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$

Ce nouvel espace est lié à une certain de notion de temps d'arrêts. Pour plus de précision, introduisons une nouvelle définition.

**Définition 5.2** (Suite localisante dans $\mathcal{H}^2$)**.** *Pour une fonction $f$ donnée, une suite croissante $(\nu_n)_{n\geqslant 1}$ de temps d'arrêts est dite localisante dans $H^2$ si*

1. *Pour tout $n \geqslant 1$, $f_n(\omega, t)1_{t\leqslant\nu_n} \in \mathcal{H}^2$ ;*
2. $\mathbb{P}\big(\cup_{n\geqslant 1}\{\omega : \nu_n = T\}\big) = 1$.

L'intérêt majeur de l'espace $\mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ est qu'il est toujours possible de construire une suite localisante pour $f \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$. Plus précisément, nous avons la proposition suivante.

**Proposition 5.1.** *Soit $f \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ alors la suite définie par*

$$\tau_n = \inf\left\{s : \int_0^s f^2(\omega, t)dt \geqslant n \quad ou \quad s \geqslant T\right\} \quad pour \quad n \geqslant 1$$

*est localisante dans $\mathcal{H}^2$.*

Expliquons à présent, en quelques mots, de quelle manière il est possible d'étendre l'intégrale d'Itō à l'espace $\mathcal{L}^2_{\text{loc}}$. Considérons une fonction $f \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ et choisissons, à l'aide de la proposition précédente, $(\nu_n)_{n\geqslant 1}$ une suite localisante. Ceci nous assure donc que

$$g_n(\omega, s) = f(\omega, s)1_{s \leqslant \nu_n(\omega)} \in \mathcal{H}^2.$$

L'étude faite dans la section précédente (cf. théorème 4.2) nous assure alors qu'il existe une unique martingale $(X_{t,n})_{t\in[0,T]}$ correspond à l'intégrale d'Itō $I(m_t g_n)$. Il suffit ensuite de faire tendre $n \to +\infty$ pour définir l'intégrale d'Itō sur $\mathcal{L}^2_{\text{loc}}$. Plus précisément, il est possible de montrer qu'il existe un unique processus continu $(X_t)_{t\in[0,T]}$ tel que

$$\mathbb{P}\left(X_t = \lim_{n\to+\infty} X_{t,n}\right) = 1 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T].$$

Alors, par définition, $\int_0^t f(\omega, s)dB_s = X_t(\omega)$ pour tout $t \in [0, T]$. Bien entendu, pour être rigoureux il faut vérifier certains points :

1. vérifier que $(X_t)_{t\in[0,T]}$ existe bien et vérifie les propriétés voulues ;
2. que le procédé décrit ci-dessus est indépendant de la suite localisante $(\nu_n)_{n\geqslant 1}$ choisie.

Les démonstrations, employant des méthodes déjà présentées dans ce cours, seront admises ; nous renvoyons le lecteur vers [8] pour découvrir celles-ci. Voyons à présent quelques conséquences de cette nouvelle extension qui permet de considérer n'importe quelle fonction continue sur $[0, T]$.

Un point important est le résultat suivant, qui permet de voir l'intégrale d'Itō comme limite de somme de Riemann.

**Théorème 5.1.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et choisissons la partition $(t_i)_{i=0,\dots,n}$ de $[0, T]$ donnée par $t_i = \frac{iT}{n}$. Nous avons alors le résultat suivant*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \int_0^T f(B_s)dB_s \tag{5.1}$$

*où la limite précédente doit être comprise au sens de la convergence en probabilité.*

*Démonstration.* Tout d'abord, nous allons montrer qu'il est possible de se ramener au cas ou $f$ est continue et à support compact afin d'obtenir une fonction appartenant à $\mathcal{H}^2$. Soient $M > 0$ et

$$\tau_M = \min\{t : |B_t| \geqslant M \quad \text{ou} \quad t \geqslant T\}$$

et observons ensuite que $\tau_M$ est une suite localisante pour la fonction $f(B_s(\omega)) \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$. De plus, pour tout $M > 0$, il existe une fonction continue à support compact $f_M$ tel que

$$f_M(x) = f(x), \quad \text{pour tout} \quad |x| \leqslant M.$$

Le point important est que $f_M(B_t) \in \mathcal{H}^2$. Nous allons à présent construire une suite d'éléments $(\phi_n)_{n\geqslant 1}$ de l'espace $\mathcal{H}^2_0$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_M - \phi_n\|_{L^2(d\mathbb{P}\times dt)} = 0.$$

A cet effet, nous posons $\phi_n(\omega, s) = \sum_{i=1}^n f_M(B_{t_{i-1}})1_{t_{i-1}<s\leqslant t_i}$ pour $n \geqslant 1$. Vérifions qu'une telle suite convienne.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\int_0^T (\phi_n(\omega,s)-f_M(B_s))^2 ds\Big] &= \mathbb{E}\Big[\int_0^T \sum_{i=1}^n \big(f_M(B_{t_{i-1}})-f_M(B_s)\big)^2 1_{t_{i-1}<s\leqslant t_i}\Big] \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\Big[\int_0^T 1_{t_{i-1}<s\leqslant t_i} \times \sup_{t_{i-1}<s\leqslant t_i} \big(f_M(B_{t_{i-1}})-f_M(B_s)\big)^2\Big] \\
&= \frac{T}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\Big[\sup_{t_{i-1}<s\leqslant t_i} \big(f_M(B_{t_{i-1}})-f_M(B_s)\big)^2\Big].
\end{aligned}$$

Posons ensuite $\mu(h)=\sup\{|f_M(x)-f_M(y)| \,:\, |x-y|\leqslant h\}$. Puisque $f_M$ est continue à support à compact, il existe $B>0$ tel que $\mu(h)\leqslant B$ pour tout $h\geqslant 0$ ; en outre, $\lim_{h\to 0}\mu(h)=0$. Définissons alors, pour tout $i=1,\dots,n$, les variables aléatoires suivantes

$$M_i = \sup_{s\,:\,t_{i-1}<s\leqslant t_i} |B_{t_{i-1}}-B_s|.$$

En conséquence, nous avons la majoration suivante

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\,:\,t_{i-1}<s\leqslant t_i} (f_M(B_{t_{i-1}})-f_M(B_s))^2\Big] \leqslant \mathbb{E}\big[\mu^2(M_i)\big] \quad \text{pour tout} \quad i=1,\dots,n.$$

Observons de plus que $\mu^2(M_i)\leqslant B^2$ pour tout $i=1,\dots,n$ et, par continuité uniforme de $t\mapsto B_t(\omega)$ sur l'intervalle compact $[0,T]$, nous avons aussi

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{i=1,\dots,n}\mu^2(M_i)=0 \quad \text{pour tout} \quad \omega\in\Omega.$$

Enfin, par convergence dominée, nous pouvons en conclure que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\Big[\sup_{s\,:\,t_{i-1}<s\leqslant t_i} (f_M(B_{t_{i-1}})-f_M(B_s))^2\Big]=0$$

ce qui justifie que $(\phi_n)_{n\geqslant 1}$ est une bien une suite d'éléments de $\mathcal{H}_0^2$ qui approche $f_M$ dans $L^2(d\mathbb{P}\times dt)$.

En utilisant l'isométrie d'Itō, nous déduisons également de ce qui précède que $I(\phi_n)$ converge, lorsque $n\to+\infty$, vers $I(f_M)$ dans $L^2(d\mathbb{P})$. De plus, en tant qu'élément de $\mathcal{H}_0^2$ nous avons la formule explicite (cf. théorème 5.1)

$$I(\phi_n)=\sum_{i=1}^n f_M(B_{t_{i-1}})(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}).$$

En utilisant à nouveau l'isométrie d'Itō, nous savons que la représentation suivante est vérifiée

$$\int_0^t f_M(B_s)dB_s = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n f_M(B_{t_{i-1}})(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}) \tag{5.2}$$

où la convergence précédente à lieu dans $L^2(d\mathbb{P})$. Montrons à présent que ceci reste également vrai en probabilité.

Pour cela, il est crucial d'observer que sur l'ensemble $\{\omega : \tau_M = T\}$ nous avons

$$f(B_{t_i}) = f_M(B_{t_i}) \quad \text{pour tout} \quad i = 1, \dots, n.$$

A cette observation, il faut combiner le lemme suivant (cf. [8]) que nous admettrons.

**Lemme 5.1.** *Dans le contexte du théorème 5.1, nous avons*

$$\int_0^t f(B_s) dB_s = \int_0^t f_M(B_s) dB_s \tag{5.3}$$

*pour presque tout* $\omega \in \{\omega : \tau_M = T\}$.

Nous pouvons alors montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, la probabilité de l'ensemble

$$A_n(\epsilon) = \left\{ \omega : |\sum_{i=1}^n f(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}). - \int_0^T f(B_s) dB_s| \geqslant \epsilon \right\}$$

tend vers zéro lorsque $n \to +\infty$. En effet, nous avons

$$\mathbb{P}\big(A_n(\epsilon)\big) \leqslant \mathbb{P}(\tau_M < T) + \mathbb{P}\big(A_n(\epsilon) \cap \{\tau_M = T\}\big).$$

Le premier terme apparaissant dans la majoration tend vers zéro lorsque $n \to +\infty$ par définition de $\tau_M$. Quant au deuxième terme, il suffit d'utiliser l'identité (5.3) qui nous permet de remplacer $f(B_t)$ par $f_M(B_t)$ sur l'ensemble $\{\omega : \tau_M = T\}$ pour ensuite appliquer l'inégalité de Tchebyshev (cf. 10.2). Plus précisément, nous avons

$$\mathbb{P}\big(A_n(\epsilon) \cap \{\tau_M = T\}\big) \leqslant \frac{1}{\epsilon^2} \left\| \int_0^T f_M(B_s) dB_s - \sum_{i=1}^n f_M(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \right\|_{L^2(d\mathbb{P})}.$$

Il ne reste plus qu'a utiliser le résultat de convergence obtenue dans l'équation (5.2) pour conclure. □

En plus d'avoir une représentation plus intuitive de l'intégrale d'Itō, le théorème précédent permet facilement de construire des processus gaussien à partir du mouvement brownien lorsque l'intégrand $f$ est déterministe. Il s'agit du contenu de la proposition suivante.

**Proposition 5.2** (Intégrales gaussiennes)**.** *Si* $f \in C^0[0, T]$ *alors le processus*

$$X_t = \int_0^t f(s) dB_s, \quad \textit{pour tout} \quad t \in [0, T]$$

*est un processus gaussien, centré, à accroissement indépendants et de fonction de covariance*

$$\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \int_0^{\min(s,t)} f^2(u) du.$$

*De plus, si nous choisissons la partition* $(t_i)_{i=0,\dots,n}$ *de l'intervalle* $[0, T]$ *définie par* $t_i = \frac{iT}{n}$ *nous avons*

$$\sum_{i=1}^n f(t_i^*)(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \int_0^T f(s) dB_s$$

*où, pour tout $i = 0, \dots, n$, $t_i^*$ est choisi tel que $t_{i-1} \leqslant t_i^* \leqslant t_i$ et la limite précédente doit être comprise au sens de la convergence en probabilité.*

*Démonstration.* La démonstration du résultat précédent est similaire, et plus simple, que la démonstration du théorème 5.1. Pour cette raison nous la laissons en exercice. □

Il serait étonnant que cette extension à $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ de l'intégrale d'Itō n'ait que des conséquences positives. Voyons ce que nous avons perdu en considérant un espace plus grand que $\mathcal{H}^2$.

L'une des principales propriétés de l'intégrale d'Itō sur l'espace $\mathcal{H}^2$ est qu'elle fournit un moyen commode d'obtenir des martingales. Sur $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ nous obtenons un résultat un peu plus faible. Pour préciser ceci, nous avons besoin d'une définition supplémentaire.

**Définition 5.3** (Martingale locale)**.** *Un processus adapté (par rapport à la filtration $(\mathcal{F})_{t\geqslant 0}$) $(M_t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale locale s'il existe une suite croissante $(\tau_k)_{k\geqslant 1}$ de temps d'arrêts telle que*

1. $\lim_{k+\infty} \tau_k = +\infty$ *presque sûrement.*
2. *Pour tout $k \geqslant 0$, la processus $M_t^{(k)} = M_{\min(t,\tau_k)} - M_0$, $t \geqslant 0$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$.*

*Remarque.* Observons que l'hypothèse d'intégrabilité présente dans la définition classique d'une martingale n'est plus exigée.

Comme l'atteste le résultat suivant, l'intégrale d'Itō sur $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ fourni des martingales locales plutôt que des martingales.

**Proposition 5.3.** *pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$, il existe une unique martingale locale $(X_t)_{t\geqslant 0}$ telle que*

$$\mathbb{P}\left( X_t(\omega) = \int_0^t f(\omega, s) dB_s \right) = 1.$$

*De plus, il est possible de choisir la suite localisante suivante*

$$\tau_n(\omega) = \inf\left\{ t \ : \ \int_0^t f^2(\omega, s) ds \geqslant n \quad ou \quad t \geqslant T \right\}.$$

*Remarque.* Bien que nous ne donnerons pas de tels résultats ici, il existe un certain nombre de proposition permettant d'obtenir, sous certaines hypothèses, une véritable martingale à partir d'une martingale locale (cf. [8, 6]).

Pour clore cette section, nous répondons rapidement à une question survenant naturellement à la suite de cette extension de l'intégrale d'Itō. Serait-il possible d'étendre plus encore l'intégrale d'Itō à l'ensemble de fonctions $f$, mesurables et adaptées, vérifiant la condition suivante

$$\mathbb{P}\left( \int_0^T |f(\omega, s)|^p ds < +\infty \right) = 1 \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant p < 2 \quad ?$$

Notons un tel espace par $\mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}$ et observons, d'après l'inégalité de Jensen, que $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}} \subset \mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}$.

La réponse à cette question est négative. En effet, grâce à la proposition 5.2 il est possible de construire un processus gaussien $(X_t)_{t\in[0,1]}$, à accroissement indépendant, à partir d'une fonction $f \in \mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}$ tel que $t \mapsto X_t$ ne puisse être prolongée par continuité sur l'intervalle complet $[0,T]$. Ceci est laissé à titre d'exercice, en considérant la fonction $f(\omega, s) = |1-s|^{-\frac{1}{2}}$ avec $s \in [0,1]$ ; plus de détails peuvent être obtenu dans [8].

# 6 Formule d'Itō

Répondons enfin à l'une des questions que nous avions laissé en suspens : est-il possible d'obtenir une méthode simple et pratique d'emploi permettant de calculer l'intégrale d'Itō d'une fonction donnée ? Idéalement, existe-t-il une version probabiliste de théorème fondamental de l'analyse ? La réponse à ceci est affirmative et nous avons le résultat suivant.

**Théorème 6.1** (Formule d'Itō)**.** *Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ alors*

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds. \tag{6.1}$$

*Démonstration.* La preuve est relativement simple et repose sur l'écriture suivante :

$$f(B_t) - f(0) = \sum_{i=1}^n f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}})$$

où $(t_i)_{i=0,\dots,n}$ une subdivision de $[0,t]$ définie par $t_i = \frac{it}{n}$. Il suffit ensuite d'utiliser une formule de Taylor sur les différences $f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}})$ pour arriver à nos fins. A cet effet, nous rappelons que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, nous avons

$$f(y) - f(x) = (y-x)f'(x) + \frac{1}{2}(y-x)^2 f''(x) + r(x,y)$$

avec le reste intégral $r(x,y) = \int_x^y (y-u)\big[f''(u) - f''(x)\big]du$. De plus, puisque $f \in C^2$, nous savons qu'il existe une fonction bornée et uniformément continue $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$h(x,x) = 0 \quad \text{et} \quad |r(x,y)| \leqslant (y-x)^2 h(x,y).$$

Supposons, dans un premier temps, que $f$ soit aussi à support compact et appliquons le schéma décrit plus haut. Nous devons alors étudier les trois termes suivants :

1. $A_n = \sum_{i=1}^n f'(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$,
2. $B_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$,
3. et enfin le reste $C_n$ qui vérifie l'inégalité suivante $|C_n| \leqslant \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 h\big(B_{t_{i-1}}, B_{t_i}\big)$.

Il est facile de traiter le premier terme en utilisant les sommes de Riemann introduites dans le théorème 5.1. En effet, puisque $f'$ est continue nous savons que

$$\lim_{n\to+\infty} A_n \stackrel{\mathbb{P}}{=} \int_0^t f'(B_s)dB_s.$$

Traitons maintenant le deuxième terme en écrivant $B_n$ sous la forme suivante

$$B_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_{i-1}})\big[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\big].$$

Puisque $f''$ est continue, le premier terme de la somme ci-dessus converge presque sûrement (comme une somme classique de Riemann) vers

$$\frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds.$$

Il reste à montrer que le 2ème terme de la somme, que nous désignerons par $\tilde{B}_n$, converge vers zéro en probabilité. Pour cela, nous utiliserons l'inégalité de Tchebychev (cf. proposition 10.2). Nous devons donc estimer $\mathbb{E}[\tilde{B}_n^2]$. Ici, par indépendance des termes, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{B}_n^2] &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\big[f''(B_{t_{i-1}})^2\big[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})\big]^2\big] \\
&\leqslant \frac{1}{4}\|f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(Y_i) \\
&= \frac{t^2}{2n}\|f''\|_\infty^2
\end{aligned}$$

avec $Y_i = (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Ainsi, la dernière égalité (ci-dessus) provient du fait que $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}(0, \frac{t}{n})$ puisque $t_i - t_{i-1} = \frac{t}{n}$ pour tout $i = 1, \dots, n$ ; d'où

$$\mathrm{Var}(Y_i) = 3\frac{t^2}{n^2} - \frac{t^2}{n^2} = \frac{2t^2}{n^2}.$$

Ainsi, par l'inégalité de Markov, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\big(|\tilde{B}_n| \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{t^2}{2n\epsilon^2} \times \|f''\|_\infty^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $C_n$ converge vers zéro en probabilité. Pour cela nous allons voir que l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz sera suffisante. Observons que

$$\mathbb{E}\big[|C_n|\big] \leqslant \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\big[|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^4\big]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\big[h^2(B_{t_{i-1}}, B_{t_i})\big]^{\frac{1}{2}}$$

D'une part, pour tout $i = 1, \dots, n$, $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}(0, \frac{t}{n})$, d'où

$$\mathbb{E}\big[|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^4\big] = \frac{3t^2}{n^2}.$$

D'autre part, pour le second terme, nous allons utiliser l'uniforme continuité de $h$ combinée avec le fait que $h(x, x) = 0$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|h(x, y)| \leqslant \epsilon$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - y| \leqslant \delta$. En conséquence,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[h^2(B_{t_{i-1}}, B_{t_i})\big] &\leqslant \epsilon^2 + \|h\|_\infty^2 \mathbb{P}\big(|B_{t_{i-1}} - B_{t_i}| \geqslant \delta\big) \\ &\leqslant \epsilon^2 + \|h\|_\infty^2 \delta^{-2} \mathbb{E}\big[|B_{t_{i-1}} - B_{t_i}|^2\big] \\ &\leqslant \epsilon^2 + \|h\|_\infty^2 \delta^{-2} \frac{t}{n}\end{aligned}$$

en utilisant à nouveau l'inégalité de Markov. Finalement, nous avons obtenu

$$\mathbb{E}\big[|C_n|\big] \leqslant n \left(\frac{3t^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\epsilon^2 + \|h\|_\infty^2 \delta^{-2} \frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc $\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big[|C_n|\big] \leqslant \sqrt{3}t\epsilon$. Puisque $\epsilon$ est arbitraire, ceci entraine que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[|C_n|] = 0$. Par suite, en utilisant une fois de plus l'inégalité de Markov, nous avons bien $\lim_{n\to+\infty} C_n \overset{\mathbb{P}}{=} 0$.

Nous avons presque conclu la démonstration lorsque $f$ est de classe $C^2$ à support compact. Nous venons de montrer que pour tout $t \geqslant 0$, les termes $A_n, B_n$ convergent vers les deux intégrales apparaissant dans la formule d'Itō (6.1) et $C_n$ tend vers zero en probabilité. A présent, si nous fixons $t \geqslant 0$, il est possible de choisir une sous-suite $(n_j)_{j\geqslant 1}$ telle que les suites $A_{n_j}, B_{n_j}$ et $C_{n_j}$ convergent avec probabilité 1. Donc, la formule d'Itō (6.1) est vérifiée avec probabilité 1 pour tout $t \geqslant 0$ fixé. Enfin, il ne reste plus qu'à appliquer l'observation précédente pour tout $t \in \mathbb{Q}_+$ en remarquant que les deux membres apparaissant dans la formule d'Itō impliquent des fonctions continues. En conclusion, il existe un ensemble $\Omega_0$ de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$ la formule d'Itō est satisfaite pour tout $t \geqslant 0$.

La dernière étape consiste à supprimer l'hypothèse de support compact. Pour cela, il suffit d'utiliser la formule que nous venons d'établir en recyclant les idées utilisées dans la démonstration du théorème 5.1 à l'aide du temps d'arrêt $\tau_M = \min\{t : |B_t| \geqslant M\}$ pour tout $M > 0$ en travaillant sur l'ensemble $\{\omega : s \leqslant \tau_M\}$. Nous laissons les détails (cf. [8]) au lecteur. □

## 6.1 Premières conséquences et généralisation multi-dimensionelle

Nous allons voir, sur des exemples simples, à quel point la formule d'Itō est efficace pour déterminer une intégrale stochastique. Supposons que nous choisissions $F \in C^2$ tel que $F' = f$ et $F(0) = 0$. Alors, le théorème 6.1 nous assure que

$$\int_0^t f(B_s)dB_s = F(B_t) - \frac{1}{2}\int_0^t f'(B_s)ds.$$

L'avantage de cette écriture est que le membre de droite peut-être évalué trajectoire par trajectoire.

**Exemple 6.1.** Si $f(B_s) = B_s$ nous retrouvons instantanément la formule

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$$

alors qu'il nous avait fallu de nombreux calculs pour parvenir à cette expression.

Bien entendu, il est possible de généraliser la formule d'Itō à des fonctions $(t, x) \mapsto f(t, x)$ de classe $C^1$ en temps et $C^2$ en espace (nous dirons que $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$). Plus précisément,

**Théorème 6.2** (Formule d'Itō à plusieurs variables)**.** *Pour toute fonction $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, nous avons*

$$f(t, B_t) = f(0, 0) + \int_0^t \partial_t f(s, B_s)ds + \int_0^t \partial_x f(s, B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \partial^2_{xx} f(s, B_s)ds \tag{6.2}$$

*Remarque.*

1. Si $X_t = f(t, B_t)$ nous adoptons la notation pratique suivante
$$dX_t = \partial_t f(t, B_t)dt + \partial_x f(t, B_t)dB_t + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t, B_t)dt$$
pour abréger la formule (6.2).
2. Il existe un résultat reliant le calcul stochastique à la théorie des équations aux dérivées partielles (cf. [8, 6]) permettant de s'assurer que, sous certaines conditions sur $f$, $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale locale. Pour cela, il faut supposer que
$$\partial_t f = -\frac{1}{2}\partial^2_{xx} f.$$
Si de plus, $\mathbb{E}\big[\int_0^T (\partial_x f)^2(t, B_t)dt\big] < +\infty$ alors $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est une véritable martingale.
3. Sans grande surprise il est également possible d'étendre tout ceci à un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$. Celui-ci sera noté $\overrightarrow{B_t} = (B^1_t, \dots, B^d_t)$ où, pour tout $k = 1, \dots, d$, $(B^k_t)_{t\in[0,T]}$ sont des mouvements browniens indépendant unidimensionnels. Dans un tel cadre la formule d'Itō, pour $f \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, s'écrit de manière abrégée
$$df(t, \overrightarrow{B_t}) = \partial_t f(t, \overrightarrow{B_t})dt + \nabla f(t, \overrightarrow{B_t}) \cdot d\overrightarrow{B_t} + \frac{1}{2}\Delta f(t, \overrightarrow{B_t})dt$$
avec $\nabla f = \Big(\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_d} f\Big)$ et $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^d \partial^2_{x_i x_i} f$. De manière similaire, la condition portant sur $f$ assurant que $M_t = f(t, \overrightarrow{B_t})$ soit une martingale locale devient
$$\partial_t(t, \overrightarrow{x}) = -\frac{1}{2}\Delta f(t, \overrightarrow{x}).$$

## 6.2 Généralisations

Il est possible de généraliser plus encore la formule d'Itō à des processus plus complexe (cf. [6, 8]).

### 6.2.1 Processus standards

A un niveau plus modeste, nous voudrions avoir une formule d'Itō pour des processus de la forme

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(\omega, s)ds + \int_0^t b(\omega, s)dB_s \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T]$$

avec $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ vérifiant certaines hypothèses de régularité naturelles.

**Définition 6.1.** *Un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ sera dit standard s'il existe des fonctions $a$ et $b$ telles que*

1. *$a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ sont mesurables et adaptées,*
2. *$\mathbb{P}\left(\int_0^T |a(\omega, s)|ds < \infty\right) = 1$ et $\mathbb{P}\left(\int_0^T |b(\omega, s)|ds < \infty\right) = 1$ ;*

*le processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ peut s'écrire sous la forme*

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(\omega, s)ds + \int_0^t b(\omega, s)dB_s \quad \textit{pour tout} \quad t \in [0, T].$$

Pour établir une formule d'Itō, nous aurions besoin d'une représentation du processus $X_t$ en tant que limite de somme de Riemann (de manière analogue au contenu du théorème 5.1).

Rappelons que pour établir ceci nous avions calculé $\int B_s dB_s$ à la main, en utilisant la subdivision $(t_i)_{i=0,\dots,n}$ de $[0, T]$ définie par $t_i = \frac{it}{n}$ afin de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \stackrel{\mathbb{P}}{=} t.$$

Pour généraliser ceci il faut introduire la notion de variation quadratique.

**Définition 6.2.**

1. *Un ensemble ordonné $\{t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n\}$ avec $t_0 = 0$ et $t_n = t$ est une partition, noté $\pi$, de l'intervalle $[0, t]$.*

2. *Le pas $\mu(\pi)$ de la partition $\pi$ est défini comme la longueur du plus grand écart entre deux points consécutifs $t_i$ et $t_{i+1}$ de la partition.*

3. *Pour toute partition $\pi = (t_i)_{i=1,\dots,n}$ de $[0, t] \subset [0, T]$ et pour tout processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$, la variation quadratique du processus (par rapport à la subdivision $\pi$) est la variable aléatoire*
$$Q_\pi(X_t) = \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2.$$

4. *S'il existe un processus $(V_t)_{t\in[0,T]}$ tel que $Q_{\pi_n}(X_t)$ converge en probabilité vers $V_t$ pour toute partition $\pi_n$ de $[0, T]$ dont le pas tends vers zéro lorsque $n \to +\infty$ (i.e. $\lim_{n\to+\infty} \mu(\pi_n) = 0$) alors $(V_t)_{t\in[0,T]}$ est la variation quadratique du processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ et sera noté $\langle X \rangle_t$.*

Il est possible de montrer que les processus standards admettent toujours une variation quadratique. Plus précisément, si $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus standard alors, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t b^2(\omega, s)ds.$$

Ce résultat et quelques efforts supplémentaires, permettent d'obtenir la formule d'Itō suivante pour les processus standards.

**Théorème 6.3** (Formule d'Itō pour les processus standards)**.** *Si $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus standard alors*

$$f(t,X_t) = f(0,0) + \int_0^t \partial_t f(s,X_s)ds + \int_0^t \partial_x f(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \partial^2_{xx} f(s,X_s)b^2(\omega,s)ds.$$

*Remarque.* En particulier, cette formule peut s'étendre aux fonctions suffisamment régulières de la forme $t \mapsto f(X_t, Y_t)$ où $X_t$ et $Y_t$ sont des processus standards de la forme

$$X_t = \int_0^t a(\omega,s)ds + \int_0^t b(\omega,s)dB_s \quad \text{et} \quad Y_t = \int_0^t \alpha(\omega,s)ds + \int_0^t \beta(\omega,s)dB_s.$$

Il est alors possible d'obtenir une formule de dérivation stochastique d'un produit (cf. [8]) :

$$X_tY_t - X_0Y_0 = \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t b(\omega,s)\beta(\omega,s)ds. \tag{6.3}$$

Lorsque l'une des fonctions $\beta$ ou $b$ est identiquement nulle, nous retrouvons la formule habituelle pour dériver un produit.

### 6.2.2 Semi-martingale

Comme le lecteur pourra l'observer dans l'ouvrage [6], il est possible de généraliser encore tout ce qui précède en introduisant la notion de semi-martingales qui généralise la notion de processus standard. Décrivons en quelques mots comment procéder.

Tout d'abord, il convient de généraliser ce qui a été fait précédemment lorsque $(B_t)_{t\in[0,T]}$ est remplacé par une martingale continue $(M_t)_{t\in[0,T]}$ quelconque. Autrement dit, nous voulons donner un sens à $\int_0^t f dM_s$. Pour cela, il faut remplacer l'espace $\mathcal{H}^2$ des fonctions vérifiant

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(t,\omega)dt\right] < +\infty$$

par un ensemble adapté. A cet effet, il convient d'observer que le terme « *dt* » apparaissant dans la définition de $\mathcal{H}^2$ provient de la variation quadratique du mouvement brownien $B$. Autrement dit,

$$\langle B\rangle_t = t.$$

Dans le cas d'un martingale quelconque, il faudrait déterminer (si cet objet existe) $\langle M\rangle_t$ pour ensuite définir $\mathcal{H}^2_M$ l'ensemble composé des fonctions vérifiant

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(t,\omega)d\langle M\rangle_t\right] < +\infty.$$

Fort heureusement, il est possible de montrer que pour n'importe quelle martingale locale continue $M$ admet une variation quadratique $\langle M\rangle_t$ (cf. [6]). En admettant ce résultat, il est donc possible de reprendre l'intégralité du cours en remplaçant $B_t$ par $M_t$ aux endroits appropriés afin de définir une nouvelle isométrie d'Itō $I_M$ (basée sur la martingale $M$) :

$$I_M(f)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}).$$

Bien entendu, cela implique aussi de modifier la définition de $\mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ comme nous avons changé la définition de $\mathcal{H}^2$ pour tenir compte de la variation quadratique de $M$.

Tout ceci permet facilement ensuite de définir l'intégrale stochastique d'une semi-martingale.

**Définition 6.3.** *1. Un processus $X$ est une semi-martingale continue s'il s'écrit sous la forme*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t \quad \textit{pour tout} \quad t \geqslant 0$$

*où $M$ est une martingale locale et $A$ un processus (continu) adapté et à variation bornée, tous deux partant de 0.*

*2. Soit $X = X_0 + M + A$ une semi-martingale continue et $f$ un processus adapté localement borné. L'intégrale stochastique $t \mapsto \int_0^t f dX_s$ est définie comme la semi-martingale continue :*

$$\int_0^t f dX_s = \int_0^t f dM_s + \int_0^t f dA_s \quad \textit{pour tout} \quad t \geqslant 0.$$

*Remarque.* Il est à noter que la deuxième intégrale $\int_0^t f dA_s$ est au sens de Stieljes puisque $s \mapsto A_s$ est à variation bornée. A partir de cette nouvelle intégrale stochastique, il est également possible d'obtenir une nouvelle formule d'Itō (cf. [6]).

# 7 Equation différentielles stochastiques

Tout les efforts que nous venons de faire pour développer l'intégrale d'Itō et démontrer la formule éponyme permet de traiter facilement des équations différentielles stochastiques (E.D.S. en abrégé). De manière grossière, la plupart des processus stochastiques dignes d'intérêt sont solutions d'une E.D.S. de la forme

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad \text{avec} \quad X_0 = x_0$$

où $\mu$ et $\sigma$ sont des fonctions vérifiant des hypothèses de régularités. Voyons, sur deux exemples, de quelle manière la formule d'Itō peut nous aider à trouver le processus $(X_t)_{t \geqslant 0}$ vérifiant l'équation précédente.

## 7.1 Un exemple pédagogique

Cherchons à résoudre l'équation différentielle stochastique suivante

$$dX_t = \mu dt + \sigma X_t dB_t \quad \text{avec} \quad X_0 = x_0$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ sont des constantes. Le plus naturel semble de supposer qu'une solution de cette E.D.S. soit de la forme $X_t = f(t, B_t)$. Ainsi, en utilisant la formule d'Itō 6.1 nous savons que

$$dX_t = \left[\partial_t f(t, B_t) + \frac{1}{2}\partial^2_{xx}(t, B_t)\right]dt + \partial_x f(t, B_t)dB_t.$$

Il est alors raisonnable d'identifier les coefficients apparaissant dans ces deux expressions de $dX_t$. C'est-à-dire, nous devons trouver une fonction $f(t,x)$ telle que

$$\mu f(t,x) = \partial_t f(t,x) + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t,x) \quad \text{et} \quad \sigma f(t,x) = \partial_x f(t,x)$$

Puisque la deuxième partie s'écrit sous la forme $\frac{\partial_x f}{f} = \sigma$ nous savons alors que $f(t,x) = \exp(\sigma x + g(t))$ avec une fonction $g$ à déterminer. En remplaçant cette expression de $f$ dans la première partie, nous trouvons que $g'(t) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$. En conclusion, nous avons donc obtenu

$$X_t = x_0 \exp\big((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t) + \sigma B_t\big).$$

Ce processus, très utilisé en finance (cf. [8]), porte le nom de mouvement brownien géométrique.

## 7.2 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

La solution de l'E.D.S. suivante

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t \quad \text{avec} \quad X_0 = x_0$$

où $\alpha > 0$ et $\sigma > 0$ correspond à un processus gaussien très important (cf. [1]). En attendant, voyons de quelle manière nous pouvons obtenir une expression de celui-ci.

Supposons que la solution de l'E.D.S. soit de la forme $X_t = a(t)\Bigg(x_0 + \int_0^t b(s) dB_s\Bigg)$ avec $a(\cdot)$ et $b(\cdot)$ des fonctions dérivables à déterminer. En utilisant la règle (6.3) de dérivation stochastique d'un produit, nous obtenons que

$$dX_t = a'(t)\Bigg(x_0 + \int_0^t b(s)dB_s\Bigg)dt + a(t)b(t)dB_t.$$

En d'autres termes, si nous supposons que $a(0) = 1$ et $a(t) > 0$ pour tout $t > 0$, le processus $X_t$ est solution de l'équation

$$dX_t = \frac{a'(t)}{a(t)} X_t dt + a(t)b(t)dB_t, \quad \text{avec} \quad X_0 = x_0.$$

Par identification, nous devons alors résoudre

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = -\alpha \quad \text{et} \quad a(t)b(t) = \sigma.$$

Il n'est pas difficile de voir que l'unique solution de la première équation différentielle, sous la contrainte $a(0) = 1$ est $a(t) = e^{-\alpha t}$ et qu'en conséquent $b(t) = \sigma e^{\alpha t}$. Autrement dit

$$X_t = e^{-\alpha t}\big(x_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB_s\big) = x_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s.$$

Cette écriture permet de constater plusieurs choses. L'influence du point de départ $x_0$ diminue exponentiellement avec le temps lorsque $t \to +\infty$. Puisque l'intégrand apparaissant dans l'intégrale stochastique est déterministe nous avons affaire à un processus gaussien à accroissement indépendant d'après la proposition 5.2. De plus ,

$$\mathbb{E}[X_t] = x_0 e^{-\alpha t} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2 \int_0^t e^{-2(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}).$$

### 7.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz stochastique

Bien entendu, il existe d'innombrables E.D.S et il serait utile d'avoir à disposition un théorème d'existence et d'unicité des solutions comme celui de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles ordinaires.

**Théorème 7.1.** *Si les coefficients $\mu$ et $\sigma$ de l'équation différentielle stochastique*

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad \textit{avec} \quad X_0 = x_0 \quad \textit{et} \quad t \in [0, T]$$

*vérifient une condition lipschizienne en espace :*

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leqslant K|x - y|^2$$

*et une condition de croissance en temps*

$$|\mu(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leqslant K(1 + |x|^2)$$

*alors il existe une solution continue et adaptée $(X_t)_{t\in[0,T]}$ de l'E.D.S. De plus, cette solution est uniformément bornée dans $L^2(d\mathbb{P})$ :*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \mathbb{E}[X_t^2] < \infty$$

*En outre, si $X_t$ et $Y_t$ sont deux solutions, continues et uniformément bornées dans $L^2(d\mathbb{P})$, de l'E.D.S. alors*

$$\mathbb{P}\Big(X_t = Y_t, \quad \textit{pour tout} \quad t \in [0, T]\Big) = 1.$$

*Démonstration.* La démonstration est admise et peut-être trouvée dans [8]. Cependant, celle-ci n'est pas complexe puisqu'elle repose, dans les grandes lignes, sur le même type d'arguments (dans une version probabiliste) que ceux utilisés dans la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz via un précédé d'itération et de point fixe (avec le théorème de Picard). □

## 8 Utilisation des martingales

Comme nous l'avons énoncé plus tôt, les martingales sont particulièrement utiles pour résoudre certains problèmes. En particulier, grâce à des théorèmes d'arrêts.

## 8.1 Temps d'arrêts et martingales

Rappelons tout d'abord la notion de temps d'arrêt. Dans ce qui suit, l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est toujours muni d'un filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$.

**Définition 8.1.** *Une variable aléatoire $\tau : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ si $\big\{\omega : \tau(\omega) \leqslant t\big\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geqslant 0$.*

*Remarque.* Si $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est une famille de variable aléatoire, il est possible de définir $X_\tau$ sur l'ensemble $\big\{\omega : \tau(\omega) < \infty\big\}$ par

$$X_\tau(\omega) = X_t(\omega).$$

L'intérêt de ce genre d'objet est contenu dans le théorème ci-dessous. En substance, celui-ci assure qu'une martingale arrêté est encore une martingale.

**Théorème 8.1** (Doob)**.** *Soient $(M_t)_{t\geqslant 0}$ une martingale continue par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ et $\tau$ un temps d'arrêt pour la même filtration. Si $X_t = M_{\min(t,\tau)}$ désigne la martingale arrêtée alors $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale continue par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$.*

*Remarque.* Nous renvoyons le lecteur vers [2] pour une démonstration de ce résultat. Signalons au passage, qu'il existe de nombreux résultats important concernant les martingales (inégalité maximale de Doob 10.1, théorème de convergence dans $L^p$ pour $p \geqslant 1, \dots$), par soucis de concision nous ne présenterons qu'une partie de ces résultats en appendice et renvoyons le lecteur vers [2] pour de détails à ce sujet.

## 8.2 Temps d'atteinte pour le mouvement brownien $(B_t)_{t\geqslant 0}$

Dans cette section nous allons étudier la question suivante : soient $a, b > 0$, qu'est-il possible de dire du temps d'arrêt

$$\tau = \min\big\{t : B_t = -b \quad \text{ou} \quad B_t = a\big\} \quad ?$$

Le théorème qui suit permet de répondre à cette question

**Théorème 8.2.** *Dans le cadre précédent, les assertions suivantes sont vérifiées*

1. *Le temps d'arrêt $\tau$ est fini p.s. : autrement dit,*
$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1.$$
2. *La probabilité d'atteindre le point $a$ est donnée par*
$$\mathbb{P}(B_\tau = a) = \frac{b}{a+b}.$$
3. *$\tau$ admet un moment d'ordre 1 : $\mathbb{E}[\tau] = ab$.*

*Démonstration.* Démontrons chacun de ces points.

1. Puisque $B_{k+1} - B_k \sim \mathcal{N}(0,1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons
$$\mathbb{P}\big(|B_{k+1} - B_k| > a + b\big) = \epsilon > 0$$
De plus, d'après les propriétés standard d'un mouvement brownien, les ensembles
$$E_k = \big\{|B_{k+1} - B_k| > a + b\big\}$$
sont mutuellement indépendants. Par suite, nous avons
$$\mathbb{P}(\tau > n+1) = \mathbb{P}\Bigg(|B_{k+1} - B_k| \leqslant a + b \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, n\Bigg) = (1-\epsilon)^n.$$
Ainsi, d'après le théorème de Borel-Cantelli 10.1, nous avons $\mathbb{P}(\tau < \infty)$. L'argument précédent, permet de montrer également que $\mathbb{E}[\tau] < +\infty$. Pour cela, il suffit d'observer que
$$\mathbb{E}[\tau] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau > k+1) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} (1-\epsilon)^k < +\infty.$$
En fait, il est possible de montrer $\mathbb{E}[\tau^p] < +\infty$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
2. Traitons la deuxième assertion, le raisonnement se décompose en plusieurs étapes.
   (a) D'après le théorème de Doob 8.1, nous savons que $(B_{\min(t,\tau)})_{t \geqslant 0}$ est martingale continue par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Donc
$$\mathbb{E}\big[B_{\min(t,\tau)}\big] = \mathbb{E}[B_0] = 0.$$
   (b) Observons que
$$|B_{\min(t,\tau)}| \leqslant a + b.$$
   Ainsi, par convergence dominée, nous avons
$$\mathbb{E}[B_\tau] = \lim_{t \to +\infty} \mathbb{E}\big[B_{\min(t,\tau)}\big] = 0$$
   d'après l'item précédent.
   (c) Enfin, il est possible de calculer d'une autre manière l'espérance de $B_\tau$. Par définition du temps d'arrêt $\tau$, nous avons
$$\mathbb{E}[B_\tau] = a\mathbb{P}(B_\tau = a) - b\big(1 - \mathbb{P}(B_\tau = a)\big).$$
   (d) En combinant ce qui précède, nous avons donc obtenu que
$$a\mathbb{P}(B_\tau = a) - b\big(1 - \mathbb{P}(a_\tau = a)\big) = 0.$$
   La résolution de ce système permet d'obtenir la formule annoncée.
3. Il se trouve que nous savons également que $M_t = B_t^2 - t$ avec $t \geqslant 0$ est une martingale continue par rapport à la filtration $(\mathcal{F})_{t\geqslant 0}$. Ceci va nous permettre de calculer l'espérance de $\tau$ en mettant en place des arguments similaires :

(a) D'après le théorème de Doob 8.1, $\big(M_{\min(t,\tau)}\big)_{t\geqslant 0}$ est une martingale. En particulier,

$$\mathbb{E}\big[M_{\min(t,\tau)}\big] = \mathbb{E}[M_0] = 0$$

(b) Observons que $|M_{\min(t,\tau)}| \leqslant a^2 + b^2 + \tau$ et que $a^2 + b^2 + \tau$ est une variable aléatoire intégrable (d'après ce qui précède). Par convergence dominée, nous avons donc

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\big[M_{\min(t,\tau)}\big] = \mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[B_\tau^2 - \tau].$$

(c) En combinant ce qui précède nous avons donc

$$\mathbb{E}[B_\tau^2 - \tau] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{E}[B_\tau^2] = \mathbb{E}[\tau].$$

Pour conclure, il suffit d'observer que $\mathbb{E}[B^2\tau] = a^2\mathbb{P}(B_\tau = a) + b^2\big(1 - \mathbb{P}(B_\tau = a)\big)$ et d'utiliser la formule obtenue dans la deuxième assertion.

□

Comme nous allons le voir, la connaissance de martingales impliquant $(B_t)_{t\geqslant 0}$ permet d'obtenir des informations sur d'autres temps d'arrêts. PAr exemple, considérons

$$\tau_a = \inf\big\{t \geqslant 0 \quad ; \quad B_t = a\big\} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Nous pouvons démontrer le résultat suivant.

**Théorème 8.3.** *Dans le cadre précédent, nous avons*

$$\mathbb{P}(\tau_a < +\infty) = 1 \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}[e^{\lambda\tau_a}] = e^{-|a|\sqrt{2\lambda}} \quad \textit{pour tout} \quad \lambda \geqslant 0.$$

*Démonstration.* En utilisant la symétrie du mouvement brownien, il est possible de se restreindre au cas $a \geqslant 0$.

1. Démontrons que $\tau_a$ est finie p.s. Pour cela, introduisons un paramètre $b > 0$ et observons que

$$\mathbb{P}(\tau_a < \infty) \geqslant \mathbb{P}(B_{\min(\tau_a,\tau_{-b})} = a) = \frac{b}{a+b}$$

d'après le théorème 8.2. Il suffit ensuite de faire tendre $b$ vers$+\infty$ pour conclure.

2. Il n'est pas difficile de montrer que $M_t = e^{\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t}$ pour $t \geqslant 0$ et $\alpha > 0$ est une martingale. C'est pourquoi, d'après le théorème de Doob 8.1, $M_{\min(t,\tau_a)}$ est une aussi martingale ; elle est de plus bornée par $e^{a\alpha}$.

3. En utilisant, le même type d'arguments que ceux employés dans le théorème 8.2, nous en déduisons les faits suivants. D'une part,

$$\mathbb{E}[M_{\tau_a}] = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[M_{\min(t,\tau_a)}] = 1$$

et, d'autre part,

$$\mathbb{E}[M_{\tau_a}] = e^{\alpha a}\mathbb{E}[e^{-\frac{1}{2}\alpha^2\tau_a}].$$

En combinant ces deux points, nous en déduisons donc que

$$\mathbb{E}[e^{-\frac{1}{2}\alpha^2\tau_a}] = e^{-\alpha a}$$

et le choix $\alpha = \sqrt{\lambda 2}$ permet de conclure.

□

*Remarque.* En particulier, ce résultat permet d'obtenir des informations supplémentaires sur $\tau_a$. En effet, par convergence dominée, nous avons

$$\mathbb{E}[\tau_a] = -\lim_{\lambda\to 0} \frac{d}{d\lambda}\mathbb{E}[e^{-\lambda\tau_a}] = \lim_{\lambda\to 0} \frac{a}{\sqrt{2\lambda}} e^{-a\sqrt{2\lambda}} = +\infty.$$

Toutefois, ceci peut s'obtenir à l'aide d'argument plus élémentaires : pour tout $b > 0$, nous avons $\tau_a \geqslant \min(\tau_a, \tau_{-b})$ donc

$$\mathbb{E}[\tau_a] \geqslant \mathbb{E}[\min(\tau_a, \tau_{-b})] = ab$$

d'après le théorème 8.2. Il ne reste plus qu'à faire tendre $b \to +\infty$ pour conclure.

# 9 Théorème de Dynkin et applications

L'un des intérêts majeurs de l'intégrale d'Itō est qu'elle donne une manière simple de construire des martingales à partir du mouvement brownien. Nous allons voir de quelle manière ceci peut se combiner avec la formule d'Itō.

Soit $X$ le processus de diffusion solution de l'E.D.S.

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

où $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^n$ ; $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions vérifiant suffisamment régulières (de sorte que l'E.D.S. admette une solution) ; par la suite, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}_x$ désignera l'espérance conditionnelle sachant $X_0 = x$. Notons par $L$ le générateur infinitésimal de $X$. Cet opérateur agit sur des fonctions $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ à support compact et se défini par

$$Lf(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}_x\big[f(X_t)\big] - f(x)}{t} \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

**Théorème 9.1** (Dynkin)**.** *Soient $(X_t)_{t>0}$ une diffusion de générateur infinitésimal $L$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau$ est un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}_x[\tau] < +\infty$ et $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, alors*

$$\mathbb{E}_x\big[f(X_\tau)\big] = f(x) + \mathbb{E}_x\bigg[\int_0^\tau Lf(X_s)ds\bigg]. \tag{9.1}$$

Voyons quelques applications de cette formule dans le cas du mouvement brownien.

**Exemple 9.1** (temps de sortie d'une boule)**.** Soit $K = \{x \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \|x\| < R\}$ avec $R > 0$. Définissons alors $\tau_K$ par

$$\tau_K = \{\inf t > 0 \quad x + B_t \notin K\} \quad \text{pour tout} \quad x \in K$$

et posons $\tau_N = \min(\tau_K, N)$ pour $N \geqslant 1$. Choisissons ensuite la fonction

$$f(x) = \|x\|^2 1_{\|x\| \leqslant R}.$$

Cette fonction appartient à $C_c^2(\mathbb{R}^n)$ et $\Delta f(x) = 2n$ lorsque $x \in K$. Par suite, la formule (9.1) nous assure que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\big[\|x + B_{\tau_n}\|^2\big] &= \|x\|^2 + \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\tau_n} \frac{1}{2}\Delta f(B_s)ds\right] \\ &= \|x\|^2 + n\mathbb{E}_x[\tau_N]. \end{aligned}$$

Puisque $\|x + B_{\tau_N}\| \leqslant R$, il est possible de faire tendre $N$ vers $+\infty$ par convergence dominée. Nous obtenons alors

$$\mathbb{E}_x[\tau_K] = \frac{R^2 - \|x\|^2}{n}.$$

Avant de présenter un nouvel exemple, nous avons besoin d'une nouvelle définition.

**Définition 9.1.** *Etant donné $x \notin K$, nous dirons que le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$ est récurrent si*

$$\mathbb{P}_x(B_t \in K) = 1.$$

*Nous dirons que le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$ est transient si*

$$\mathbb{P}_x(B_t \in K) < 1.$$

Voyons comment la formule de Dynkin nous permet de résoudre ce problème en fonction de la dimension de $\mathbb{R}^n$.

**Exemple 9.2** (Récurrence/transience)**.** Soit $N \in \mathbb{N}$ et considérons

$$A_N = \big\{x \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad R < \|x\| < 2^N R\big\} \quad \text{avec} \quad R > 0.$$

Notons alors par $\tau$ le premier temps de sortie de $x + B_t$ de $A_N$. Autrement dit, $\tau = \min\big(\tau_K, \tau'\big)$ où

$$\tau' = \inf\big\{t > 0 \quad ; \quad \|x + B_t\| = 2^N R\big\}.$$

Observons également que

$$\mathbb{P}_x(\tau_K < \tau') = \mathbb{P}_x\big(\|x + B_\tau\| = R\big) = 1 - \mathbb{P}_x\big(\|x + B_\tau\| = 2^N R\big).$$

Pour alléger les notations, nous posons $p_N = \mathbb{P}_x(\tau_K < \tau')$. Notons à présent que les solutions de $\Delta f = 0$ sont données par

$$\begin{cases} |x| \quad \text{si} \quad n = 1, \\ -\log\|x\| \quad \text{si} \quad n = 2, \\ \|x\|^{2-n} \quad \text{si} \quad n > 2. \end{cases}$$

La formule de Dynkin (9.1) entraine alors que

$$\mathbb{E}_x\big[f(x + B_\tau)\big] = f(x).$$

En outre, $\mathbb{E}_x\big[f(x+B_\tau)\big] = f(R)p + f(2^N R)(1-p)$. Autrement dit,

$$p_N = \frac{f(x) - f(2^N R)}{f(R) - f(2^N R)}.$$

Si $N \to +\infty$ alors $\tau' \to +\infty$ d'où

$$\mathbb{P}_x(\tau_K < \infty) = \lim_{N \to +infty} \frac{f(x) - f(2^N R)}{f(R) - f(2^N R)}.$$

Déterminer à présent la limite du membre de droite en fonction de la dimension.

1. Si $n = 1$ alors
$$\mathbb{P}_x(\tau_K < \infty) = \lim_{N \to +\infty} \frac{2^N R - |x|}{2^N R - R} = 1$$
2. Si $n = 2$ alors
$$\mathbb{P}_x(\tau_K < \infty) = \lim_{N \to +\infty} \frac{\log \|x\| + N \log 2 - \log R}{N \log 2} = 1$$
3. Si $n > 2$ alors
$$\mathbb{P}_x(\tau_K < \infty) = \lim_{N \to +\infty} \frac{(2^N R)^{2-n} + \|x\|^{2-n}}{(2^N R)^{2-n} + R^{2-n}} = \left(\frac{R}{\|x\|}\right)^{n-2} < 1.$$

En résumé, le mouvement brownien est récurrent en dimension 1 et 2 ; il est transient si $n > 2$.

# 10 Appendice

Pour le confort du lecteur, nous rappelons quelques résultats qui sont utilisés tout au long de ce cours. Nous renvoyons le lecteur vers [2] pour plus de détails à ce sujet.

Le lemme de Borel-Cantelli est un outil essentiel permettant d'établir un résultat de convergence presque sûre d'une suite de variable aléatoire $(X_n)_{n \geqslant 0}$.

**Lemme 10.1** (Borel-Cantelli)**.** *Si pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geqslant \epsilon\right) < \infty$$

*alors $X_n \to X$ p.s.*

*Remarque.* Lorsque $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et $X$ une variable constante presque sûrement, le résultat précédent est alors une équivalence.

Nous rappelons à présent le principe des inégalités de Markov.

**Proposition 10.1** (Markov)**.** *Soit $Y$ une variable aléatoire réelle et positive. Alors, pour tout $t > 0$, nous avons*

$$\mathbb{P}(Y \geqslant t) \leqslant \frac{1}{t} \int_{\{Y \geqslant t\}} Y d\mathbb{P} \leqslant \frac{1}{t} \mathbb{E}[Y].$$

*Démonstration.* Soit $t > 0$, il suffit d'observer que l'inégalité suivante est satisfaite de manière évidente :

$$1_{\{Y \geqslant t\}} \leqslant \frac{Y}{t} 1_{\{Y \geqslant t\}}$$

puis d'intégrer celle-ci par rapport à $d\mathbb{P}$. □

*Remarque.* L'argument de la démonstration se généralise aisément. En effet, considérons

$$\phi \, : \, I \to \mathbb{R}$$

une fonction positive, croissante, définie sur un sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$ ; si $Y \in I$ p.s. alors nous avons

$$\mathbb{P}(Y \geqslant t) \leqslant \frac{1}{\phi(t)} \mathbb{E}\big[\phi(Y)\big] \quad \text{pour tout} \quad t \in I.$$

Bien entendu, cette majoration est pertinente uniquement si le membre de droite (de l'inégalité précédente) est inférieur ou égal à 1. En général, il est coutume de choisir $\phi(t) = t^q$ avec $q > 1$ ou $\phi(t) = e^{\lambda t}$ avec $\lambda > 0$.

En particulier, voici une conséquence classique de l'inégalité de Markov 10.1.

**Proposition 10.2** (Bienaymé-Tchebychev)**.** *L'inégalité suivante est satisfaite pour n'importe quelle variable aléatoire $Z$*

$$\mathbb{P}\bigg(\big|Z - \mathbb{E}[Z]\big| \geqslant t\bigg) \leqslant \frac{1}{t^2} \mathrm{Var}(Z) \quad \textit{pour tout} \quad t > 0. \tag{10.1}$$

Enfin, voici l'inégalité maximal de Doob pour des martingales continues.

**Théorème 10.1** (Inégalité maximale de Doob)**.** *Soient $(M_t)_{t \geqslant 0}$ une sous-martingale continue et $\lambda > 0$. Alors, pour tout $p \geqslant 1$, nous avons l'inégalité*

$$\lambda^p \mathbb{P}( \sup_{t \in [0,T]} M_t > \lambda) \leqslant \mathbb{E}[M_T^p]. \tag{10.2}$$

*Remarque.* Bien entendu, ce résultat reste vrai dans un cadre discret en remplaçant le supremum par un maximum.

# 11 Notes historiques

Les quelques références historiques qui vont suivre proviennent des ouvrages [8, 6, 3].

L'approche hilbertienne que nous avons utilisé (pour définir l'isométrie d'Itō en début de chapitre est due aux mathématiciens Paley, Wiener et Zygmund (1933). L'extension de l'intégrale d'Itō à l'espace $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}$ a été fait par Itō lui même en 1944.

Le cadre d'étude de la proposition 5.2 pour obtenir des processus gaussiens à partir d'intégrant déterministe existe depuis 1933 avec les travaux de Paley, Wiener et Zygmund. a priori, il s'agit de la première définition d'un intégrale stochastique. Pour l'anecdote, Paley mourut à 26 cette même année, d'un accident de ski près de Banff, alors que l'article allait être publié.

L'extension de l'intégrale stochastique à des processus non-déterministes est due à Itō (1944). En particulier, la notion de martingale locale est apparue dans les travaux de Itō-Watanabe. Itō fut également à l'origine de la notion d'E.D.S.

L'E.D.S. qui nous a permit d'introduire le processus d'Ornstein-Uhlenbeck porte le nom d'équation de Langevin.

Il nous semble essentiel de mentionner le mathématicien d'origine allemande Wolfgang Doeblin. Son père étant juif, il dut fuir l'Allemagne nazie avec ses parents pour finalement s'installer en France. En mars 1938 Doeblin a soutenu sa thèse sous la direction de Fréchet. En novembre 1938, il incorpore l'armée pour effectuer un service militaire de deux ans. En plus de ses activités militaires, il réussit à poursuivre son travail de recherche. Ses travaux de l'époque portaient sur l'équation de Chapman-Kolmogorov (celle-ci se trouve à l'intersection des théorie des probabilités et celle des équations aux dérivées partielles). Plus tard, fin août 1939, Doeblin est affecté comme téléphoniste dans le 291ième régiment d'infanterie dans les Ardennes. Doeblin envoya le résultat de ses recherches sous forme de « pli cacheté » à l'Académie des sciences. Quelques jours après la demande d'armistice par la France et à la suite de la dislocation de son régiment, il se trouva alors séparé de ses camarades. Le lendemain matin, il se suicide, dans le village de Housseras, plutôt que de tomber aux mains des Allemands. Inhumé le même jour comme « soldat anonyme », son corps ne sera identifié qu'en 1944. Le pli cacheté qu'il envoya à l'Académie des sciences lorsqu'il se trouvait sous les drapeaux, à la mi-février 1940, ne fut ouvert qu'en 2000.

Ce pli cacheté contenant ses travaux proposait une ébauche d'une théorie similaire à celle d'Itō à propos du calcul stochastique. Ces idées, sur lesquelles sont fondées le calcul stochastique, seront retrouvées, plus tard, de manière indépendante, par le mathématicien K. Itō.

## Références

[1] D. Bakry, I. Gentil, and M. Ledoux. *Analysis and geometry of Markov diffusion operators.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 348, 2014.

[2] P. Barbe and M. Ledoux. *Probabilité.* EDP Sciences, 2007.

[3] R. M. Dudley. *Real Analysis and Probability.* Cambridge studies in advenced mathematics, 2002.

[4] J. Faraut. *Calcul intégral.* EDP Sciences, 2006.

[5] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer, 2000.

[6] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer, 2004.

[7] W. Rudin. *Principes d'analyse mathématique.* Dunod, 2006.

[8] J.M. Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications.* Springer, 2001.

[9] T. Tao. *An Epsilon of Room, I : Real Analysis : pages from year three of a mathematical blog.* AMS, 2010.