AP mathématiques 2de, calcul vectoriel et colinéarité

1 Rappels

Exercice 1. Tracer un triangle équilatéral ABC de côté 4 cm. Construire le point D vérifiant

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

Exercice 2. Dans un repère $(O; I; J)$, considérons les points $A(1; 3)$, $B(-3; 2)$, $C(0; -2)$ et $D(4; -1)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
2. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.
3. Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CA}$.

2 Colinéarité

2.1 Sans coordonnées

Exercice 3. Soit $ABCD$ un parallélogramme ainsi que E et F les points définis par

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$$

1. Faire une figure et placer les points E et F.
2. Démontrer que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{CE}$.
4. En déduire que les points E, C et F sont alignés.

2.2 Avec coordonnées

Exercice 4. Dans un repère $(O; I; J)$, considérons les points $A(-4; -1)$, $B(-1; 1)$, $C(3; 3)$, $D(-1; -3)$ et $E(5; 1)$.

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.
2. En déduire la nature du quadrilatère $ABED$.
3. Les points A, B et C sont-ils alignés ?*Indication : étudier la colinéarité des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 5. Déterminer la valeur de x pour laquelle les vecteurs $\overrightarrow{u}(2;5)$ et $\overrightarrow{v}(x;3)$ sont colinéaires.

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants, déterminer x de sorte que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires. Donner ensuite $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.

1. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.
2. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 4-x \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4+x \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Dans un repère $(O;I;J)$, considérons les points $A(-2;-3)$, $B(-6;5)$ et $C(2;1)$.

1. Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Soient D, E et F trois points définis par
$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \quad ; \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$
3. Que dire des droites (CF) et (AB) ?
4. Déterminer les coordonnées des points D, E et F.
5. Démontrer que les droites (DE) et (AC) sont parallèles.
6. Montrer que les points D, E et F sont alignés.

3 Exercices supplémentaires

Exercice 8. Soient $A(-1;3)$, $B(1;1)$, $C(2;2)$ et $D(3;4)$ quatre points du plan.

1. Calculer les coordonnées des points E, F et G tels que
   (a) $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$.
   (b) C est le milieu de $[AF]$.
   (c) $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.
2. Démontrer que les points E, F et G sont alignés.

Exercice 9. Dans un repère $(O;I;J)$, considérons les points $A(0;1)$, $B(4;1+8x)$ et $C(x;1+x^2)$. Déterminer x de tel sorte que les points soient alignés.

Exercice 10. Dans un repère orthonormé, considérons les points : $A(-2;4)$, $B(3;3)$, $C(-1;0)$ et $D(4;-1)$.

1. Démontrer que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.
2. Le quadrilatère ABDC est-il aussi un losange ? Justifier votre réponse.