Chapitre 1

Equations et études de signes

1.1 Equations de degré 1 (rappels)

Il est important de savoir résoudre une équation de degré 1. Les solutions correspondent aux abscisses des points d'intersections entre une droite et l'axe (Ox).

Exemple 1.1.1. Résoudre l'équation $2x-1=0$ revient à trouver tout les nombres $x\in\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité précédente. Ici, nous trouvons que

$$\begin{aligned}
2x-1=0 \quad &\iff \quad 2x-1+1=0+1\\
&\iff \quad 2x=1\\
&\iff \quad \frac{2x}{2}=\frac{1}{2}\\
&\iff \quad x=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

L'équation admet donc une unique solution : $\frac{1}{2}$.

Note : il convient de bien comprendre quels sont les opérations (en bleu ou en orange qui ont été employées pour isoler x.

Remarque. De manière similaire, il est important de savoir résoudre une inéquation de la forme

$$2x+1>0 \quad \iff \quad x>\frac{1}{2}.$$

Rappelons au passage que si l'on divise ou multiplie une inéquation par un nombre négatif, il faut changer le sens de celle-ci :

$$\begin{aligned}
-3x+0\geq 0 \quad &\iff \quad -3x+9-1\geq 0-9\\
&\iff \quad -3x\geq -9\\
&\iff \quad \frac{-3x}{-3}\leq\frac{-9}{-3}\\
&\iff \quad x\leq 3.
\end{aligned}$$

1.1.1 Polynômes de degré 2

Les fonctions suivantes sont légèrement plus compliquées. Par exemple, $f(x) = -6x^2 + 30x - 36$. Plus généralement, ces fonctions sont de la forme suivante.

Définition 1.1.1. *Une fonction polynomiale de degré deux est une fonction de la forme*

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.1.2.
1. $g(x) = -3x + 1$ n'est pas une fonction de degré 2.
2. $f(x) = -6x^2 + 30x - 36$ est une fonction de degré 2 et $a = -6$, $b = 30$ et $c = -36$.
3. $h(x) = x^2 + x + 1$ est une fonction de degré 2 et $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$.

1.2 Equations de degré 2

La fonction $f(x) = -6x^2 + 30x - 36$ pourrait s'interpréter comme les recettes d'une entreprise lorsqu'elle vend x objets. Il semble alors intéressant de savoir comment résoudre $f(x) = 0$; cela revient à savoir pour quelle quantité vendue, l'entreprise ne fait aucun bénéfice sans pour autant perdre de l'argent.

Voici un résultat approprié pour ce résoudre ce problème.

Proposition 1 (Résolution d'équation d'ordre deux)**.** *Soit*

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Trois cas de figure se présentent à nous :

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux racines, réelles, distinctes*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad et \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine réelle (dite double)*

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

3. *Si $\Delta < 0$, il n'existe aucune solution réelle à l'équation.*

Exemple 1.2.1. Voyons comment fonctionne ce théorème sur plusieurs exemples.
1. Résolvons $-6x^2 + 30x - 36 = 0$.
2. Faisons de même avec $x^2 + x + 1 = 0$
3. Traitons également le cas $2x^2 - 4x + 8 = 0$.

1.3 Signe d'un polynôme du second degré

Maintenant que nous savons comment résoudre une équation de degré 2, cherchons à déterminer son signe. Cela nous permettra de résoudre des inéquations de la forme $-6x^2 + 30x - 36 > 0$; si $f(x) = -6x^2 + 30x - 36$ désigne les recettes obtenues par une entreprise lors de la vente de x objets, la résolution de $f(x) > 0$ permet de savoir à quel moment l'entreprise réalisera des bénéfices.

Théorème 2 (Signe d'un polynôme de degré 2)**.** *Soit*

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Trois cas de figure se présentent à nous :

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux racines x_1 et x_2 et nous avons le tableau de signes suivant*

x	$-\infty$		x_1		x_1		$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$		signe(a)	0	$-$signe(a)	0	signe(a)	

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine réelle x_0 et nous avons le tableau de signes suivant*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$		signe(a)	0	signe(a)	

3. *Si $\Delta < 0$, il n'existe aucune solution réelle à l'équation et nous avons le tableau de signes suivant*

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$		signe(a)	

Exemple 1.3.1. Voyons comment fonctionne ce théorème sur plusieurs exemples.

1. Résolvons $-6x^2 + 30x - 36 > 0$ et $-6x^2 + 30x - 36 \geq 0$.
2. Faisons de même avec $x^2 + x + 1 > 0$
3. Traitons également le cas $2x^2 - 4x + 8 < 0$.