Chapitre 1

Nombres complexes (partie I)

1.1 Introduction

Longtemps après les travaux d'Al-Khwarizmi, des mathématiciens italiens se sont penchés sur la résolution d'équation de degré trois. L'un des premiers fut Scipione del Ferro en 1515, suivit de son élève Tartaglia en 1535 et enfin le mathématicien Cardan (1545). Ce genre de recherche pouvait être motivé, entre autres, pour être appliqué à des problèmes de balistiques. Il est à noter qu'à l'époque ce genre d'exercices n'en était qu'à ses balbutiements et qu'il était prestigieux de découvrir des méthodes de résolutions. La recherche de ce prestige entraina bien sûr des rancoeurs et des querelles quant à la paternité d'une découverte, ce fut notamment le cas entre Tartaglia et Cardan.

Voyons à présent une équation de degré trois :

$$(\tilde{E}) : \quad z^3 - 15z - 4 = 0$$

Comment déterminer ses solutions (si elles existent) ? L'idée est trouver une nouvelle expression de cette équation pour se ramener à une équation de degré 2 afin d'utiliser Δ. Cardan a eu la remarquable idée de chercher les solutions sous la forme

$$z = u + v \quad \text{avec} \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Ce choix peut sembler curieux mais l'introduction de nouvelles variables va nous laisser une marge de manoeuvre suffisante pour déterminer l'ensemble des solutions. Il est fort probable que nous n'ayons pas besoin de tous les couples réels $u + v$ par la suite, peut-être pourrons-nous nous restreindre à ceux vérifiant une condition qui nous arrange.

Ecrivons l'équation $(\tilde{E})$ à l'aide de ces nouvelles variables.

$$(\tilde{E}) \quad \Longleftrightarrow \quad (u+v)^3 - 15(u+v) - 4 = 0$$

Or $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 = u^3 + v^3 + 3(u+v)uv$, nous avons donc

$$(\tilde{E}) \quad \Longleftrightarrow \quad u^3+v^3+3(u+v)uv-15(u+v)-4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u^3+v^3+(u+v)(3uv-15)-4 = 0.$$

Visiblement, nous ne sommes pas plus avancés. C'est donc le moment d'imposer une condition sur u et v (en espérant obtenir des simplifications), nous chercherons les solutions de $(\tilde{E})$ sous la forme

$$z = u + v \quad \text{avec} \quad 3uv - 15 = 0.$$

En faisant ceci, nous devons donc résoudre le système

$$\begin{cases} u^3 + v^3 - 4 = 0 \\ 3uv - 15 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u^3 + v^3 = 4 \\ u^3v^3 = \frac{15^3}{27} \end{cases}$$

Pour y voir un peu plus clair posons $X_1 = u^3$ et $X_2 = v^3$, notre problème consiste donc à résoudre

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 4 \\ X_1X_2 = \frac{15^3}{27} \end{cases}$$

En se rappelant des cours de 1ère (relations racines/coefficients), nous remarquons que X_1 et X_2 sont les racines de l'équation $X^2 - 4X + \frac{15^3}{27} = 0$. Nous pouvons donc utiliser Δ. Ici,

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times \frac{15^3}{27} = 16 - 500 = -484 = (-1) \times 22^2 < 0.$$

A priori, nous ne pouvons pas conclure. Pourtant, comme le mathématicien Bombelli (1526-1572) à son époque, nous allons faire preuve d'audace et d'imagination en écrivant $\sqrt{\Delta} = 22\sqrt{-1}$ où $\sqrt{-1}$ vérifie $\sqrt{-1}^2 = -1$. Par suite, nous avons

$$X_1 = \frac{4 + 22\sqrt{-1}}{2} = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad X_2 = 2 - 11\sqrt{-1}.$$

Bien entendu, ceci semble absurde pour l'instant ! Il reste maintenant à revenir aux variables u et v en utilisant une racine cubique (pour défaire le cube) :

$$u^3 = X_1 = 2 + 11\sqrt{-1} \iff u = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

et

$$v^3 = X_2 = 2 - 11\sqrt{-1} \iff v = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

Il faut encore vérifier que $z = u + v = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$ est bien une solution de $(\tilde{E})$. Pour cela, il convient de simplifier ces racines cubiques[1], il se trouve que

$$u = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{et} \quad v = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}.$$

En effet, pour établir ceci, il suffit de vérifier que $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$.

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= (2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{-1} + \sqrt{-1}^2)(2 + \sqrt{-1}) \\ &= (3 + 4\sqrt{-1})(2 + \sqrt{-1}) \\ &= 6 + 3\sqrt{-1} + 8\sqrt{-1} + 4\sqrt{-1}^2 \\ &= 2 + 11\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

1. Les outils nécessaires permettant de déterminer une expression plus simple de cette racine cubique seront étudiés plus tard dans l'année

Il est possible de procéder à la même vérification pour v^3. Ainsi, $z = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$ et il s'agit bien d'une solution de l'équation puisque $4^3 - 14 \times 4 - 4 = 0$. Sans le savoir, Bombelli venait d'inventer de nouveaux nombres. Il s'agit précisément des nombres qui permettent de résoudre une équation de degré 2 lorsque $\Delta < 0$. En 1777, Euler décida de noter i la solution de l'équation $z^2 + 1 = 0$. Autrement dit, ce nombre est défini par

$$i^2 = -1.$$

La vidéo suivante est un complément agréable à ce que nous venons d'observer.
`https://www.arte.tv/fr/videos/097454-010-A/voyages-au-pays-des-maths/`.

Remarque. Si le temps le permet, j'expliquerai dans un chapitre ultérieur comment justifier rigoureusement, plutôt que postuler, l'existence de ce nombre i.

1.2 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Définition 1.2.1. *L'ensemble des nombres complexes (noté $\mathbb{C}$) est composé de nombres de la forme*

$$z = a + ib \quad \textit{avec} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Rappelons que le nombre i vérifie $i^2 = -1$ [2]*.*

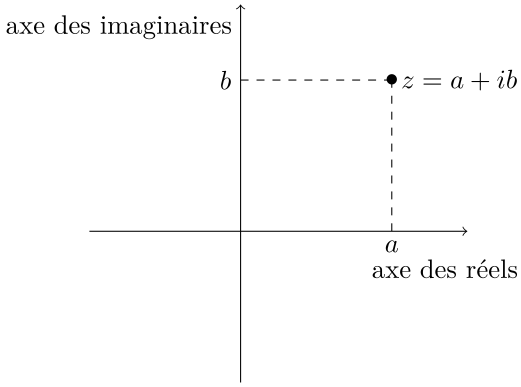
Remarque. 1. L'écriture $z = a + ib$ est appelée *forme algébrique* de z. De plus,
- a est appelé *partie réelle* de z et nous noterons $a = \mathrm{Re}(z)$.
- b est appelé *partie imaginaire* de z et nous noterons $b = \mathrm{Im}(z)$.

2. Voyons quelques points de vocabulaire :
   - Si $b = 0$ alors $z = a$ est un nombre réel. En particulier, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
   - Si $a = 0$ alors $z = ib$, nous dirons dans ce cas que z est un imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

3. **Attention** : il n'y a pas d'ordre dans $\mathbb{C}$. Par exemple, cela **n'a pas de sens d'écrire** $3 + 2i < 5 - i$. Il n'est pas possible de comparer des nombres complexes entre eux (comme il n'était pas possible de comparer des vecteurs entre eux).

Exemple 1.2.1. Il est utile de représenter les nombres complexes dans un repère orthonormé. Cette fois-ci l'axe des abscisses correspond à la partie réelle d'un nombre complexe et l'axe des ordonnées correspond à sa partie imaginaire. Nous reviendrons sur cet aspect géométrique dans un prochain chapitre.

2. Nous n'utiliserons plus jamais la notation $\sqrt{-1}$ qui n'a pas de sens.



Regardons quelques exemples pour s'entrainer à distinguer les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe.

Exemple 1.2.2.
1. Si $z = -4i + 3$ alors $\text{Re}(z) = 3$ et $\text{Im}(z) = -4$.
2. Si $z = 2i$ alors $\text{Re}(z) = 0$ et $\text{Im}(z) = 2$; il s'agit d'un imaginaire pur.
3. Si $z = -7$ alors $\text{Re}(z) = -7$ et $\text{Im}(z) = 0$; il s'agit d'un nombre réel.

Remarque. **Attention :** pour la partie imaginaire, il faut seulement indiquer le nombre réel en facteur de i. Il est assez courant de rencontrer l'erreur suivante : $\text{Im}(z) = 2i$.

Exercices à traiter : 18 page 34 et 72 page 37 (à la maison).

Proposition 1 (Unicité de l'écriture)**.** *Soient $z, z' \in \mathcal{C}$. Nous avons alors la propriété suivante :*

$$z = z' \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \quad et \quad \text{Im}(z) = \text{Im}(z')$$

Remarque. Finalement cette propriété est semblable à celle vue en 1ère avec des polynômes : deux polynômes sont égaux s'ils ont les mêmes coefficients. Cette propriété était notamment utilisée pour factoriser un polynôme de degré 3. Par exemple, si $P(x) = x^3 - 1$ il n'est difficile de voir que $x = 1$ est une racine. Par suite, il existe des réels a, b et c tels que

$$P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

Pour déterminer la valeur de ces coefficients, il suffit de développer le membre de droite pour ensuite identifier la valeur des coefficients en utilisant l'expression initiale de P, $P(x) = x^3 - 1$.

Voyons un exemple d'application.

Exemple 1.2.3. Soit $z = x^2 - x - 2 + 3ix$ avec $x \in \mathbb{R}$. Comment choisir x pour que z soit un imaginaire pur ? Pour cela, il suffit de remarquer

$$\text{Re}(z) = x^2 - x - 2 \quad \text{et} \quad \text{Im}(z) = 3x.$$

Pour que z soit un imaginaire pur, il faut et il suffit que $\text{Re}(z) = 0$. Autrement dit, nous devons résoudre

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 2 \quad \text{puisque} \quad \Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$$

Exercice à traiter : 19 page 34 et 32 page 34 (à la maison).

1.3 Opérations sur les nombres complexes

Il est maintenant important de voir de quelle manière se déroulent les opérations entre deux nombres complexes.

Comme nous allons le voir au travers d'exemples, tout se passe comme avec les nombres réels. Il suffit de rassembler les parties imaginaires et réelles entre elles à la fin des calculs. Il faut cependant garder à l'esprit l'identité $i^2 = -1$.

Exemple 1.3.1. Soient $z = 3i + 5$ et $z' = -4i + 12$ alors

1. $z + z' = 3i + 5 - 4i + 12 = -i + 17$
2. $z' - z = -4i + 12 - 3i - 5 = -7i + 7$
3. $z \times z' = (3i + 5)(-4i + 12) = -12i^2 + 36i - 20i + 60 = 12 + 16i + 60 = 72 + 16i$ puisque $i^2 = -1$.
4. $z^2 = (3i + 5)^2 = (3i)^2 + 30i + 25 = -9 + 25 + 30i = 16 + 30i$.

Remarque. Au passage, le dernier exemple montre que $\mathrm{Re}(z^2) \neq \big(\mathrm{Re}(z)\big)^2$ et $\mathrm{Im}(z^2) \neq \big(\mathrm{Im}(z)\big)^2$.

Exercices à traiter : 26(QA et QC) et 29 page 34 ; 80,81 page 38.

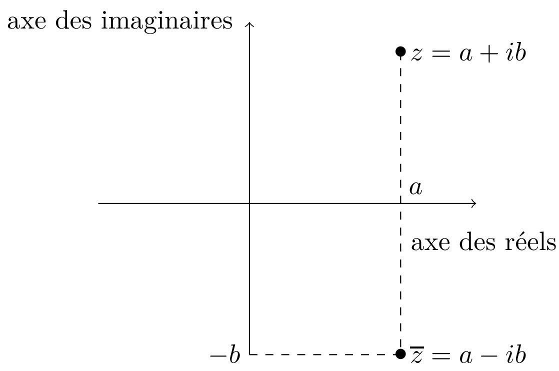
1.4 Nombres complexes conjugués

Avant d'aborder les quotients de nombres complexes, il est nécessaire d'introduire le nombre conjugué $\bar{z}$ d'un complexe z.

Définition 1.4.1. *Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ alors son nombre conjugué (noté $\overline{z}$) est défini par*

$$\overline{z} = a - ib.$$

Remarque. Géométriquement $\overline{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des réels.



Voyons quelques exemples

Exemple 1.4.1.

$$\overline{i} = -i \quad ; \quad \overline{3+2i} = 3-2i \quad ; \quad \overline{-3i+12} = 3i+12.$$

Exercices à traiter : 77 page 38 et 79p38 (à la maison).

Ce nouveau nombre permet d'écrire sous forme algébrique un quotient de deux nombres complexes.

Exemple 1.4.2. Soit $z = 2+3i$ et $z' = 1-i$, nous souhaitons déterminer la forme algébrique de

$$\frac{2+3i}{1-i}$$

pour cela, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué $\overline{z'} = 1+i$ de z'. Autrement dit,

$$\frac{2+3i}{1-i} = \frac{2+3i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(i+1)} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$$

Exercices à traiter : 35p35

Voyons quelques propriétés satisfaites par cette opération de conjugaison. Débutons tout d'abord par son comportement vis-à-vis des opérations usuelles.

Proposition 2. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ alors*

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad ; \quad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad \textit{avec} \quad z' \neq 0.$$

Voyons sur deux exemples.

Exemple 1.4.3.

$$\overline{(2+i) \times (-1+4i)} = (2-i) \times (-1-5i) \quad ; \quad \overline{\left(\frac{-i}{4-6i}\right)} = \frac{i}{4+6i}.$$

Exercices à traiter : 77p38.

Voyons maintenant d'autres propriétés satisfaites par l'opération de conjugaison. Il est important de comprendre le principe de la démonstration.

Proposition 3. *Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$ (i.e. $\mathrm{Re}(z) = a$ et $\mathrm{Im}(z) = b$).*

1. $\overline{\overline{z}} = z$ *et* $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$.
2. $z + \overline{z} = 2a$ *et* $z - \overline{z} = 2b$.
3. $z \in \mathbb{R}$ *si et seulement si* $\overline{z} = z$.
4. $z \in i\mathbb{R}$ *si et seulement si* $\overline{z} = -z$.

Démonstration. Démontrons certaines de ces propriétés, les autres sont laissées à titre d'exercices. L'idée essentielle est d'utiliser l'écriture algébrique de z pour travailler.

1. $\bar{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$.
2. Puisque $\bar{z} = a - ib$, nous avons $z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a$.
3. • (sens direct) Supposons que $z \in \mathbb{R}$ cela signifie que $\mathrm{Im}(z) = 0$ donc $z = a$. Par suite, $\bar{z} = a = z$.
   • (réciproque) supposons que $\bar{z} = z$ cela signifie que $a - ib = a + ib \iff 2ib = 0 \iff b = 0$. Ainsi, $z = a$.

□

Exercices à traiter : 88p39 + démontrer l'assertion numéro 4 de la proposition ; Interro à faire (manipulation nombres complexes, parties réelles et imaginaires, conjugué).

Voyons comment résoudre une équation impliquant un nombre conjugué.

Exemple 1.4.4. Résolvons l'équation $(E)\ :\ 2z + i\bar{z} = 5 - 2i$. Pour cela, posons à nouveau $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. L'équation devient

$$(E) \quad \iff \quad 2(a + ib) + i(a - ib) = 5 - 2i.$$

Dans le membre de gauche rassemblons les parties réelles et imaginaires entre elles.

$$2(a + ib) + i(a - ib) = 5 - 2i \quad \iff \quad 2a + b + i(a + 2b) = 5 - 2i.$$

Il ne reste plus qu'à identifier, membres à membres, les parties réelles et imaginaires entre elles. Ceci mène au système suivant

$$\begin{cases} 2a + b = 5 & \text{(partie réelle)} \\ a + 2b = -2 & \text{(partie imaginaire)} \end{cases}$$

Nous trouvons alors $a = 4$ et $b = -3$. Autrement dit, l'unique solution de (E) est $z = 4 - 3i$.

Exercice à traiter : 34p35 (Q1 et Q2) ; 97p39 (Q1 et Q3 à la maison).

1.5 Equations polynomiales dans $\mathbb{C}$

Comment faire pour résoudre les équations suivantes :

$$3z + 1 - i = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 + z + 1 = 0?$$

Equations de degré 1

Tout se passe comme dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.5.1.

$$3z + 1 - i = 0 \quad \iff \quad 3z = -1 + i \quad \iff \quad z = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i.$$

La règle du produit nul est encore vérifiée. La terminologie savante correspondant à ceci consiste à dire que $\mathbb{C}$ est un corps intègre.

Exemple 1.5.2.

$$(z-3+2i)(4i-1+2z)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} z-3+2i=0 \\ \text{ou} \\ 4i-1+2z=0 \end{array} \right.$$

Exercices à traiter : 33p34 (Q1 à Q3) et 94p39, 108p40 (Q3,Q4 à la maison).

Equations de degré 2

Comme l'année passée, nous souhaitons résoudre des équations de la forme

$$(E)\ :\ az^2+bz+c=0 \quad \text{avec} \quad a,b,c\in\mathbb{R}.$$

Cette fois-ci, nous autorisons les solutions à être des nombres complexes. A nouveau, la résolution s'effectue à l'aide du déterminant.

Proposition 4. *Soit* $\Delta = b^2-4ac$*, alors*

1. *si* $\Delta > 0$*, il existe deux solutions réelles distinctes :*

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. *Si* $\Delta = 0$*, il existe une solution réelle :*

$$x_0=\frac{-b}{2a}.$$

3. $\Delta < 0$*, il existe deux solutions complexes conjuguées :*

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad et \quad z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Remarque.

1. La nouveauté réside dans le troisième point. En 1ère, les solutions x_0, x_1, x_2 étaient obtenues à l'aide de la forme canonique et de l'utilisation d'une identité remarquable

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Lorsque $\Delta < 0$, nous avions quelque chose de la forme

$$a^2+b^2$$

que nous ne pouvions pas factoriser. A présent, grâce aux complexes, c'est possible :

$$a^2+b^2=(a-ib)(a+ib)$$

2. Dans le troisième point, nous avons $\overline{z_1}=z_2$ et vice-versa.

3. **Attention** ne jamais mettre de nombres négatifs ou de nombres complexes sous la racine !

   Voyons sur un exemple.

Exemple 1.5.3. Résolvons $z^2 + z + 1 = 0$. Ici $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Il y a donc deux solutions complexes

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{-(-3)}}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Exercices à traiter : 111p40 (à finir à la maison) + interro résolution équation (degré 1, degré 2 et nombre conjugué).

1.6 Pour aller plus loin

Imaginons que nous souhaitions résoudre l'équation :

$$z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0.$$

Il parait naturel de calculer $\Delta = (-2i)^2 - 4 \times 1 \times (-1 + 2i) = -8i$. Nous sommes alors bien ennuyés car cela n'a pas de sens d'écrire $\sqrt{-8i}$. Pour palier à cela, nous allons déterminer un nombre $\delta \in \mathbb{C}$ correspondant à la racine carré de $-8i$. Autrement dit, nous souhaitons que

$$\delta^2 = -8i.$$

Une fois δ déterminé, nous aurons deux solutions

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}. \tag{1.6.1}$$

Pour déterminer δ, il suffit de supposer que $\delta = a + ib$ afin d'obtenir un système d'équations (d'inconnues a et b). Observons que nous devons avoir

$$\delta^2 = (a + ib)^2 = -8i \quad \iff \quad a^2 + 2iab - b^2 = -8i.$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, nous constatons que nécessairement

$$a^2 - b^2 = 0 \quad \text{et} \quad -2ab = -8 \quad \iff \quad a^2 - b^2 = 0 \quad \text{et} \quad ab = -4$$

Enfin, observons que $|\delta^2| = \delta \times \overline{\delta} = a^2 + b^2$ or, par définition de δ^2, nous avons aussi $|\delta^2| = |-8i| = 8$. Nous devons donc avoir

$$a^2 + b^2 = 8.$$

Note : ce calcul implique l'utilisation du module $|\cdot|$ *qui n'a pas encore été introduit. Il faudra patienter le prochain chapitre sur les nombres complexes pour étudier cela.*

En résumé, nous avons obtenu le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ ab = -4 \quad \text{(i.e. } a \text{ et } b \text{ sont de signe opposé)} \\ a^2 + b^2 = 8 \end{cases}$$

La résolution de ce système fournit deux possibilités $a = 2$ et $b = -2$ ou $a = -2$ ou $b = 2$. L'une comme l'autre nous fournira le même résultat, supposons donc que

$$\delta = 2 - 2i.$$

Il suffit alors d'utiliser les formules de (1.6.1) pour conclure.