Chapitre 10

Loi à densité (1ère partie)

Dans ce nouveau chapitre nous allons étudier un nouveau type de variables aléatoires.

10.1 Loi à densité

Jusqu'ici, nous avons principalement rencontré qu'une seule loi de probabilité : la loi binomiale. Rappelons que si $X \sim B(5; 0,25)$ (i.e. la variable X suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0,25$), cela signifie que X compte le nombre de succès obtenu sur 5 répétitions de la même épreuve de Bernoulli. Autrement dit, les seules valeurs pouvant être prise par X sont les suivantes :

$$0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5.$$

Comment pourrions nous faire si nous avions une variables aléatoire qui puisse prendre un nombre infini de valeurs ?

Exemple 10.1.1. Imaginons que X désigne le temps d'attente à une station de métro de Lille. Nous pouvons supposer que X est une valeur (aléatoire) comprise entre 0 minutes (le métro est là lorsque nous arrivons sur le quai) jusqu'à 5 min (nous attendons durant 5 sur le quai avant de monter dans le métro).

Comment faire pour calculer la probabilité d'attendre 1 minute $\mathbb{P}(X = 1)$? Nous serions tenter d'utiliser le même type de raisonnement que lorsqu'on manipule un dé (nombre de cas favorables/nombre de cas total). Malheureusement, il y a une infinité de possibilité ici (attendre 1 min, $1,05$ minute, $2,0456$ minutes,...) puisque l'intervalle $[0; 5]$ contient une infinité de nombre ; nous obtenons donc que

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

ce qui est un peu ennuyeux.

Pour résoudre ce problème, nous allons plutôt regarder des évènements « plus grand ». Par exemple, quelle est la probabilité d'attendre entre 1 et 2 minutes le métro (i.e. $\mathbb{P}(1 \leqslant X \leqslant 2)$). Pour calculer ce genre d'évènement, nous allons utiliser des fonctions et des intégrales. Plus précisément, nous allons voir que de nombreux aléas peuvent être modélisés par une fonction f. Cette fonction porte le nom de **densité de probabilité** et nous aurons le résultat suivant :

$$\mathbb{P}(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)dx.$$

Grâce à l'un des chapitres précédents, nous allons donc pouvoir calculer l'aire sous la courbe C_f entre les points c et d et affirmer que ce nombre correspond à la probabilité désirée (le véritable argument justifiant ceci est trop complexe pour être développé en BTS).

Au cours de ce chapitre et ce suivant, nous allons étudier différents type de variables aléatoires grâce aux densités de probabilités associées. Ces variables aléatoires modélisent de manière pertinent un phénomène précis. Débutons par la loi uniforme.

10.2 Loi uniforme

La loi uniforme $\mathcal{U}[a;b]$ modélise parfaitement **un temps d'attente compris entre deux valeurs** a **et** b (sans tenir compte du sens, nous supposerons que $a, b \in \mathbb{R}$).

Proposition 20. *Si X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ (en abrégé $X \sim \mathcal{U}[a;b]$) alors*

$$\mathbb{P}(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{1}{b-a}\int_c^d 1dx$$

pour tout intervalle $[c;d] \subset [a;b]$.

Remarque.

1. Notons le fait suivant : si $X \sim \mathcal{U}[a;b]$ alors $\mathbb{P}(X \notin [a;b]) = 0$.
2. Si $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\mathbb{P}(X \leq x) \in [0;1]$ porte le nom de fonction de répartition. Elle permet de comprendre comment se répartit l'aléa de la variable aléatoire X. Cette définition est valable pour n'importe quelle loi de probabilité.

Voyons sur un exemple.

Exemple 10.2.1. Si $X \sim \mathcal{U}[1;4]$ alors

$$\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{1}{4-1}\int_2^3 1dx = \frac{1}{3}(3-2) = \frac{1}{3}.$$

Implicitement, nous avons utiliser le fait que $F(x) = x$ est une primitive de $f(x) = 1$ et avons calculé la différence de la fonction F évaluée en $x = 3$ et $x = 2$.

Comme pour la loi binomiale, il est possible de calculer des paramètres associés à une variable aléatoire uniforme. Nous allons nous concentrer sur l'espérance et la notion de variance.

Proposition 21. *Soit $X \sim \mathcal{U}[a;b]$ alors*

- *son espérance vaut* $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$
- *sa variance vaut* $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- *son écart type* $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Remarque. 1. Les résultats obtenus plus haut sont obtenus en calculant des intégrales. Par exemple, dans notre contexte,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx.$$

Exercices à traiter : 1 à 2 de la feuille associée.

10.3 Loi normale

La loi normale apparait naturellement pour modéliser des phénomènes aléatoires indépendants dont les effets s'ajoutent sans que l'un d'eux soit dominant. Prenons un exemple,

Exemple 10.3.1. Supposons que nous nous placions à l'entré d'une salle de spectacle et que nous notions la taille de chaque personne pénétrant dans la salle. Si nous dessinions l'ensemble des valeurs obtenues (nombre d'individus en fonction de la taille), il est fort à parier que nous aurions un graphique de la forme

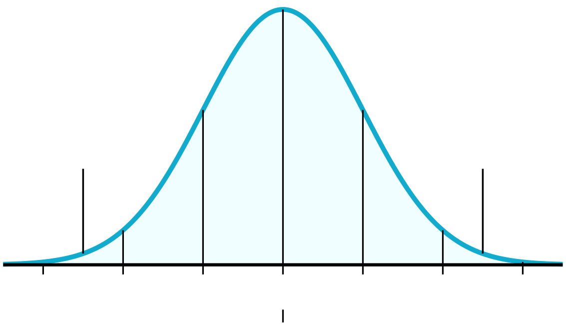


Figure 10.1: Loi normale

L'axe centrale correspond à la taille moyenne μ ($1,70$ m par exemple). Ce graphique est à interpréter de la manière suivante : plus l'aire sous la courbe est importante, plus la probabilité est élevée et réciproquement. Par exemple :

- sur les extrémités de la courbe (à gauche et à droite), nous voyons que l'aire sous la courbe est très petite. Cela signifie donc que la probabilités d'obtenir une personne de très petite taille ($\leqslant 1,30$m) ou de très grande taille ($\geqslant 2,10$m) est très faible.
- En revanche, l'aire sous la courbe est beaucoup plus importante lorsque l'on se place autour de la valeur centrale μ. Ce qui correspond bien à l'intuition : la majorité des gens ont une taille comprise entre $1,50$m et $1,90$ m.

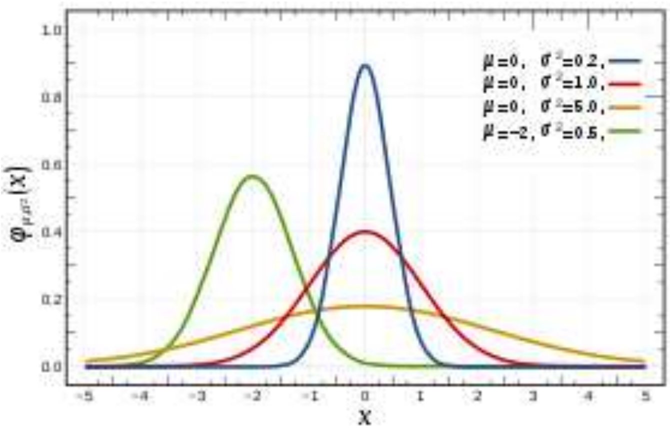
Voyons comment décrire formellement cet aléa.

Définition 10.3.1. *La loi normale de moyenne $\mu \in \mathbb{R}$ et d'écart-type $\sigma > 0$ (en abrégé $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$) admet pour densité de probabilité la fonction*

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad pour\ tout \quad t \in \mathbb{R}.$$

Remarque. Il est sous entendu que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\mathbb{E}[X] = \mu$ et $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

Cette fonction semble horriblement compliquée, voyons comment mieux l'appréhender. Comme cela est visible sur le graphique ci-dessous, **la moyenne μ correspond à l'emplacement de l'axe centrale de la courbe**; l'écart-type σ permet de contrôler **l'aplatissement** de la courbe (**plus σ est petit plus la courbe est pointue**).



Rassurez-vous, en pratique, la calculatrice nous permettra de déterminer la valeur des probabilités souhaitées. Pour cela, il suffit de procéder de la manière suivante :

1. Sélectionner l'onglet *probabilité* et la loi *normale*.
2. Entrer la valeurs des paramètres μ et σ.
3. Procéder comme avec la loi binomiale pour calculer les probabilités voulues.

Remarque. Tout ceci est résumé dans la vidéo suivante : https://www.youtube.com/watch?v=kZVL8AR-1ug&list=PLVUDmbpupCapZdNo8QaVDkWz3eqneIYK1&index=30

Exemple 10.3.2. Soit $X \sim \mathcal{N}(10; 1,5)$. Nous obtenons alors les valeurs suivantes (en choisissant $\mu = 10$ et $\sigma = 1,5$) :

1. $\mathbb{P}(X \leq 10) = 0,5$
2. $\mathbb{P}(7 \leqslant X \leqslant 13) \approx 0,95$. Autrement dit, $\mathbb{P}\big(X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]\big) \approx 0,95$: environ 95% des valeurs prises par X sont contenues dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$.
3. $\mathbb{P}(8,5 \leqslant X \leqslant 11,5) \approx 0,68$. Autrement dit, $\mathbb{P}\big(X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]\big) \approx 0,68$.
4. ....

Exercices à traiter : 3 à 6 de la feuille associée.

10.4 Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

La loi normale joue un rôle primordiale en probabilité, elle permet notamment, sous certaines conditions, d'approcher une loi binomiale.

Théorème 22 (de Moivre-Laplace)**.** *Soit $X \sim B(n;p)$ et supposons que*

1. *le nombre de répétitions n est suffissament grand : $n \geqslant 30$*
2. *la probabilité de succès p n'est pas trop proche de 0 ou de 1 : $np > 5$ et $n(1-p) > 5$.*

alors il est possible d'approcher X par une loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$.

Remarque. 1. Comme nous le verrons dans des exercices, sous les hypothèses précédentes, les valeurs fournies par la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$ sont sensiblement les mêmes que celles obtenues via la loi binomiale $B(n;p)$.

2. Il existe d'autres conditions permettant d'approcher une loi binomiale par une loi normale, nous n'en proposons qu'une seule ici.

Exemple 10.4.1. Soit $X \sim B(300; 0,6)$, les conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace sont vérifiées. Nous pouvons donc approcher X par une variable $Y \sim \mathcal{N}(180; \sqrt{72})$. Voyons ce que nous obtenons sur un exemple :

$$\mathbb{P}(178 \leqslant x \leqslant 180) \approx 0,139\,1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(177,5 \leqslant Y \leqslant 180,5) \approx 0,139\,4$$

ces deux valeurs sont très proches.

Remarque. Le décalage entre les deux intervalles ($[178; 180]$ versus $[177,5; 180,5]$) sera toujours préciser dans l'énoncé d'un exercice.

Exercices à traiter : 7 à 8 de la feuille associée.