Chapitre 12

Calcul littéral (2ème partie)

Dans un chapitre précédent nous avons vu comment **développer des expressions algébriques**. Dans l'exemple ci-dessous, nous rappelons que cela consiste à **passer du membre de gauche** au **membre de droite** (contenant le résultat sous forme simplifiée) :

$$\underbrace{(3x-1)(4x+2)}_{\text{forme factorisée}} = 12x^2+6x-4x-2 = \underbrace{12x^2+2x-2}_{\text{forme développée}}.$$

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'opération inverse : passer de la forme factorisée (i.e $12x^2+2x-2$) à la forme factorisée (i.e $(3x-1)(4x+2)$). Il s'agit du procédé de **factorisation**. Cette notion est **essentielle pour résoudre des équations algébriques**.

12.1 Factorisation

En classe de seconde, plusieurs outils sont à notre disposition pour factoriser une expression algébrique. Observons ces différentes méthodes par le biais d'exemples.

Exemple 12.1.1. ***(Chercher un facteur commun)***

1.
$$2x^2-4x = 2x\times x - 2x\times 2 = 2x(x-2)$$

   Une fois le facteur commun ($2x$) identifié, il ne reste plus qu'à recopier les termes restant (x et -2) à l'intérieur de parenthèses.

2. Factorisons l'expression suivante
$$x^2(x-2)+(x-2) = x^2(x-2)+1(x-2) = (x-2)(x^2+1).$$
   Cette fois-ci le facteur commun est $(x-2)$. Notons également que, pour factoriser, il est nécessaire de faire apparaitre le facteur 1 qui était sous-entendu (multiplier par 1 ne change rien, ce facteur est omis la plupart du temps).

3. Traitons un dernier exemple, plus élaboré cette fois-ci :

$$\begin{aligned}(-x+2)(3x+1)-2(-x+2)(x+4) &= (-x+2)\left[(2x+1)-2(x+4)\right] \\ &= (-x+2)(3x+1-2x-8) \\ &= (-x+2)(x-7).\end{aligned}$$

Exercices à traiter : 57, 59 page 52 ; 58 et 60 page 52 à faire à la maison.

Si les **identités remarquables** sont utilisées pour développer une expression, elles sont aussi utiles pour **obtenir une factorisation**. Pour cela, il suffit de les lire « dans l'autre sens »(cela revient à lire les égalités ci-dessous de gauche à droite) :

$$\underbrace{a^2+\pm 2ab+b^2}_{\text{forme développée}} = \underbrace{(a\pm b)^2}_{\text{forme factorisée}}.$$

et

$$\underbrace{a^2-b^2}_{\text{forme développée}} = \underbrace{(a+b)(a-b)}_{\text{forme factorisée}}.$$

Voyons ceci en application sur deux exemples.

Exemple 12.1.2. ***(identité remarquable)***

1. En utilisant l'identité $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, nous pouvons factoriser l'expression suivante :

$$9x^2-16=(3x)^2-4^2=(3x+4)(3x-4)$$

   Pour cela, il suffit de choisir $a=3x$ et $b=4$.
2. En utilisant l'identité $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, nous pouvons factoriser l'expression suivante :

$$4x^2+16x+16=(2x)^2+2\times 2x\times 2+4^2=(2x+2)^2$$

   Pour cela, il suffit de choisir $a=2x$ et $b=4$.

Exercices à traiter : 66 page 53.

12.2 Résoudre une équation à l'aide d'une factorisation

Comme souvent en mathématiques, nous chercherons à transformer un problème compliqué en un autre, plus simple, que nous savons résoudre. Concernant les équations algébriques, cela reviendra à ***factoriser*** notre expression algébrique pour obtenir un produit (nous verrons plus tard le cas des quotients). Nous utiliserons ensuite les propriétés suivantes qui ramènerons notre problème à la résolution d'une équation de degré un.

Pour mettre tout ceci en oeuvre, nous avons besoin de la règle suivante [1] :

Proposition 32. ***Produit nul*** *: soient $A, B \in \mathbb{R}$ alors*

$$A \times B = 0 \Longrightarrow A = 0 \quad ou \quad B = 0.$$

Remarque. Pour appliquer cette proposition il est essentiel d'avoir une expression algébrique **sous forme factorisée**.

Voici plusieurs exemples illustrant la propriété précédente. séparer l'exemple en 2 : appli direct et factorisation intermédiaire.

Exemple 12.2.1.

1. Résolvons $(2x-4)(x+5) = 0$. D'après la règle du produit nul, il faut et il suffit de résoudre les équations suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-4=0 \\ \text{ou} \\ x+5=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ \text{ou} \\ x=-5 \end{array}\right.$$

Il y a donc deux solutions $x = 2$ ou $x = -5$.

2. Résolvons l'équation :

$$(2x+1)(x+3) = (2x+1)(-2x+2).$$

Cette fois-ci, un travail supplémentaire est nécessaire. Dans un premier temps, nous devons rassembler tous les termes dans le membres de gauche (afin d'avoir 0 dans le membre de droite). Dans un second temps, nous pourrons déterminer un **facteur commun** permettant de factoriser notre expression algébrique sous la forme d'un produit nul.

$$(2x+1)(x+3) = (2x+1)(-2x+2) \iff (2x+1)(x+3) - (2x+1)(-2x+2) = 0.$$

Identifions ensuite un facteur commun :

$$\begin{array}{rcl} (2x+1)(x+3) - (2x+1)(-2x+2) & = & 0. \\ \iff (2x+1)(x+3+2x-2) & = & 0 \\ \iff (2x+1)(3x+1) & = & 0 \end{array}$$

Nous nous sommes ramenés à une forme du type $A \times B = 0$. Ainsi, d'après la propriété 32, nous devons donc résoudre deux équations :

$$2x+1 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x+1 = 0.$$

En d'autres termes

1. Un ensemble vérifiant cette règle est dit *intègre*.

$$(2x+1)(x+3) = (2x+1)(-2x+2) \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{3}$$

et l'ensemble des solutions s'écrit $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3} \right\}$.

Remarque. ***Mise en garde*** : il n'est pas correct de simplifier directement l'équation

$$\cancel{(2x+1)}(x+3) = \cancel{(2x+1)}(-2x+2)$$

puisque cette quantité peut être nulle (en effet, si $x = -\frac{1}{2}$ alors $2x+1 = 0$). Cela reviendrait à diviser par 0 ce qui est interdit !

Exercices à traiter : 27, 29, 31 (Qa,Qb,Qc) et 23 (Qa,Qd) page 96 ; 30 page 96 à faire à la maison.

Voyons à présent comment utiliser des **identités remarquables** pour résoudre des équations (toujours en association avec la règle du produit nul).

Exemple 12.2.2. 1. Si nous souhaitons résoudre l'équation

$$(E): \quad 4x^2 - 24x + 36 = 0.$$

Il suffit d'observer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$(E): \quad (2x)^2 - 2 \times 2x \times 6 + 6^2 = 0.$$

Pour ensuite utiliser **l'identité remarquable** $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ avec $a = 2x$ et $b = 6$. Par suite, nous obtenons

$$4x^2 - 24x + 36 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (2x-6)^2 = 0 \quad \underset{\text{règle du produit nul}}{\Longleftrightarrow} \quad 2x - 6 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3.$$

2. Imaginons que nous souhaitions résoudre $x^2 = 9$. Pour cela, nous allons utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

$$x^2 = 9 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 3^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-3)(x+3) = 0 \quad \underset{\text{règle du produit nul}}{\Longleftrightarrow} \quad x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

Le dernier exemple suggère que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est naturellement utilisée pour résoudre des équations de la forme $x^2 = d$ avec $d \in \mathbb{R}_+$. Ceci est formalisé dans la proposition suivante.

Proposition 33. *Soit $d \in \mathbb{R}_+$. L'équation*

$$(E): \quad x^2 - d = 0$$

admet deux solutions : $x_1 = \sqrt{d}$ et $x_2 = -\sqrt{d}$.

Démonstration. En utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ (avec $a = x$ et $b = \sqrt{d}$), l'équation (E) peut s'écrire

$$x^2 - (\sqrt{d})^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) = 0.$$

Il suffit ensuite d'utiliser la règle du produit nul pour conclure. □

Remarque.
1. Il est important **d'utiliser l'identité remarquable pour ne pas oublier l'une des deux solutions**. En pratique, lorsque nous ferrons de la géométrie et calculerons des distances, la racine négative sera régulièrement exclue car une telle valeur ne peut correspondre à une longueur.
2. Graphiquement, ces solutions correspondent aux abscisses des points d'intersection entre la courbe $x \mapsto x^2 - d$ et l'axe (Ox) (cf. figure 9.1.).

Exemple 12.2.3.
1. L'équation $x^2 - 4 = 0$ admet deux solutions $x_1 = 2$ et $x_2 = -2$; celles ci-sont visibles graphiquement ci-dessous.

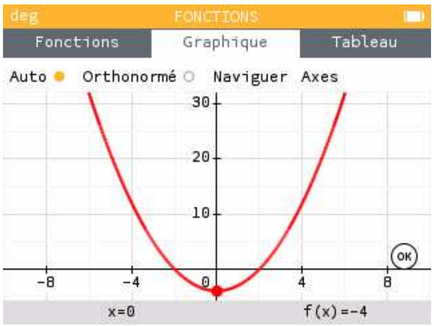

FIGURE 12.1: Représentation de $y = x^2 - 4$

2. L'équation $x^2 - 8 = 0$ admet deux solutions $x_1 = 2\sqrt{2}$ et $x_2 = -2\sqrt{2}$.

Exercices à traiter : 23 (Qb,Qc), 31 (Qc,Qd), page 96 et 35,37 page 97 ; 88 et 89 page 104 (facultatifs)

12.3 Résolution d'inéquation et tableau de signe

Maintenant que nous savons résoudre des équations, voyons comment l'utilisation des méthodes de factorisation permet de résoudre des inéquations produits.

Avant cela, rappelons brièvement comment résoudre des inéquations de degré 1 (i.e. déterminer le signe d'une fonction affine $f(x) = ax + b$).

12.3.1 Rappels sur les fonctions affines

Nous rappelons ci-dessous, au travers d'un exemple, que le signe d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ dépend du signe du coefficient directeur a.

Exemple 12.3.1. Prenons la fonction $f(x) = -3x + 2$. Lorsque nous traçons son graphique nous constatons que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses au point $x = \frac{2}{3}$:

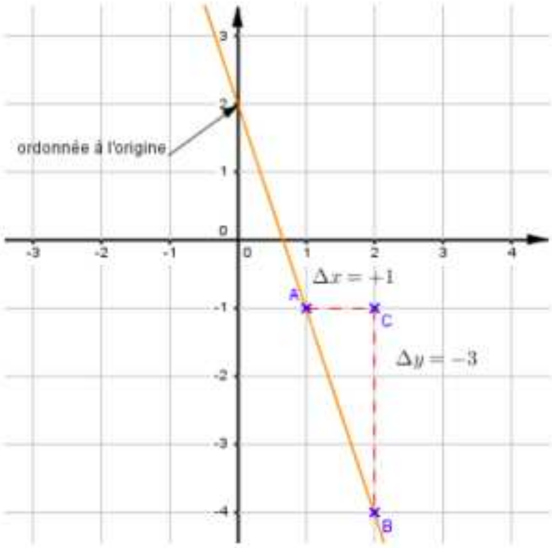

FIGURE 12.2: Représentation de $f(x) = -3x + 2$

Ce graphique nous permet ensuite de déterminer le signe de f. Ceci se résume dans le tableau de signes.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $-3x + 2$		$+$	0	$-$	

Ces résultats se vérifient aisément par le calcul en résolvant les inégalités $-3x + 2 > 0$ et $-3x + 2 < 0$.

Remarque. Si jamais nous avions considéré la fonction $g(x) = 3x + 2$ nous n'aurions pas le même tableau de signe. En effet, cette fonction s'annule en $x = -\frac{2}{3}$ plutôt qu'en $x = \frac{2}{3}$ et la place des signes $+$ et $-$ sont échangés :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $3x+2$		$-$	0	$+$	

Ceci provient du signe du coefficient directeur $a = 3$:

$$3x + 2 \geq 0 \iff 3x \geq -2 \iff x \geq -\frac{2}{3}.$$

Remarque : le sens de l'inégalité est inchangé car nous avons divisé par le nombre $3 > 0$.

Ces résultats, combinés à une règle de signe évidente, permet de résoudre des inéquations produit. C'est l'objet de la section suivante.

12.3.2 Signe d'un produit

Voyons comment résoudre des inéquations à l'aide d'un tableau de signes.

Exemple 12.3.2. Résolvons l'inéquation $(x+1)(-2x+6) < 0$. Pour cela, il suffit de résoudre séparément $x + 1 = 0$ et $-2x + 6 = 0$ pour ensuite dresser un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $-2x+6$		$+$		$+$	0	$+$	
$(x+1)(-2x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nous lisons ensuite dans le tableau que $(x+1)(-2x+6) < 0 \iff x \in]-\infty; -1[\cup]3 : +\infty[$.

Exercices à traiter : 53, 54 page 98 ; 55 et 56 page 98 à faire à la maison.

Ajoutons une étape de factorisation à la méthode précédente.

Exemple 12.3.3. Résolvons, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $36 - 4x^2 \geq 0$.

1. Il est essentiel de **factoriser** l'expression précédente afin de **se ramener à un produit** :

$$36 - 4x^2 \geq 0 \iff 6^2 - (2x)^2 \geq 0 \iff (6 + 2x)(6 - 2x) \geq 0$$

   où nous avons utilisé l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ pour factoriser le membre de gauche.

2. Nous allons à présent **dresser un tableau de signes** lequel va permettre de résoudre l'inégalité considérée dans l'exemple.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
signe de $6-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $6+2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(6-2x)(6+2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La dernière ligne du tableau est obtenue en utilisant la règle suivante :

$$+\times+=+,\quad +\times-=-\quad \text{et}\quad -\times-=+.$$

Cette dernière ligne fournit donc le signe du produit $(6-2x)(6+2x)$. Ainsi, l'ensemble des solutions de notre inégalité est l'intervalle $[-3;3]$. Autrement dit,

$$36-4x^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [-3;3].$$

Remarque. 1. Si jamais nous avions plusieurs facteurs supplémentaires, nous aurions rajouté autant de lignes au tableau pour ensuite appliquer la règle des signes.

2. Dans l'exercice nous avons factorisé l'expression algébrique à l'aide d'une identité remarquable. En fonction de l'énoncé, nous aurions pu **factoriser en déterminant au préalable un facteur commun** pour ensuite utiliser la règle du produit nul.

Exercices à traiter : 62, 63 page 99 et 97 page 105 ; 96 page 105 (facultatif).

12.4 Bilan du chapitre

Voici les compétences à maitriser dans ce chapitre.

- Utilisation de la règle du produit nul pour résoudre une équation.
- Utilisation d'un tableau de signe pour résoudre une inéquation.
- Utiliser la forme la plus adaptée pour résoudre un problème (factorisée, développée).