Chapitre 11

Convexité

Dans ce chapitre, nous abordons une nouvelle propriété des fonctions. En adoptant le point de vue d'un physicien, cela pourrait se résumer ainsi : si $t \mapsto f(t)$ désigne la position d'un solide au cours du temps, $t \mapsto f'(t)$ représente sa vitesse et $t \mapsto f''(t)$ représente son accélération. Nous allons donc étudier la dérivée de f', c'est-à-dire la dérivée seconde f'' de f. Comme nous allons le voir, les propriétés de f'' permettent d'obtenir des résultats précieux sur f.

11.1 Définition

Définition 11.1.1. *Une fonction **dérivable**[1] $f : I \to \mathbb{R}$ est dite :*

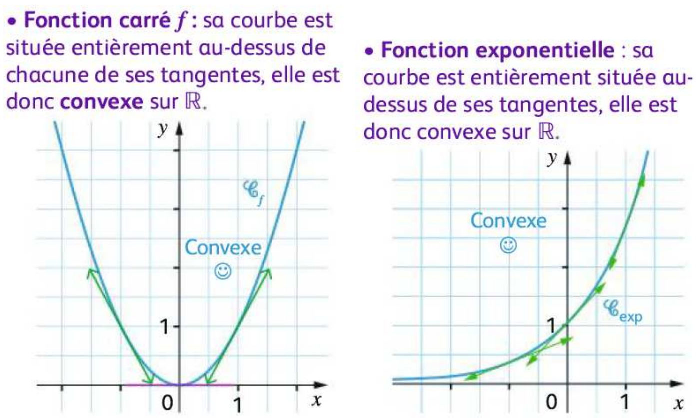
- ***convexe** sur l'intervalle I si sa représentation graphique C_f est située entièrement **au-dessous** de chacune de ses tangentes.*
- ***concave** sur l'intervalle I si sa représentation graphique C_f est située entièrement **au-dessous** de chacune de ses tangentes*

Remarque. La propriété de convexité (ou concavité) est une propriété très contraignante et est très utile lorsqu'il faut résoudre des problèmes complexes d'optimisation. C'est pourquoi la plupart des fonctions ne sont ni convexe, ni concave.

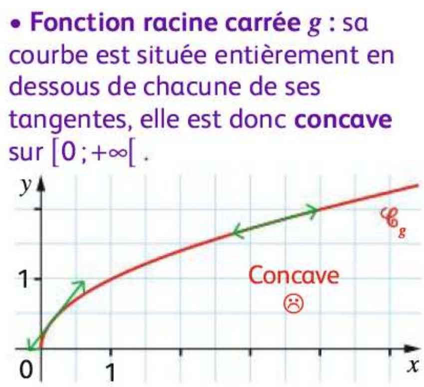
De nombreuses fonctions usuelles vérifient des propriétés de convexité (ou concavité) cela permet de forger son intuition à propos de cette nouvelle notion et d'avoir des images représentatives en tête.

1. Il est possible d'écrire une définition plus générale de la convexité afin d'éviter de supposer que f est dérivable. Ceci ne sera pas abordé cette année

Exemple 11.1.1. 1. Débutons par deux fonctions convexes : la fonction carré et la fonction exponentielle



2. Voici un exemple de fonction concave : la fonction racine carrée



Remarque. Il n'est pas difficile de montrer que $x \mapsto e^{-x}$ est une fonction convexe et que la fonction $x \mapsto \ln x$ est une fonction concave. La fonction $x \mapsto |x|$ est également une fonction convexe. Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves.

Exercices à traiter : 58 (sauf question 1) page 23 et 62 page 24.

11.2 Liens avec la dérivée seconde

La définition n'étant pas très pratique, il est important d'avoir des critères simples d'emploi permettant de vérifier qu'une fonction est convexe (ou concave). Voici un premier résultat dans ce sens à partir des propriétés de f'.

Théorème 37 (Conditions suffisantes I)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Les assertions suivantes sont alors vérifiées :*

- *f est convexe* convexe *sur l'intervalle I si et seulement* ***si f' est croissante*** *sur I.*
- *f est* concave *sur l'intervalle I si et seulement* ***si f' est décroissante*** *sur I.*

Remarque. 1. Il est remarquable que nous ayons réussi à obtenir **une condition analytique** (la monotonie de la dérivée) afin d'obtenir une **propriété géométrique** (la convexité ou la concavité).

2. Grossièrement, l'étude de la convexité d'une fonction permet de qualifier son « rythme de croissance » (ou de décroissance). Par exemple, en cas de croissance, une fonction convexe croît « de plus en plus »(comme la fonction exponentielle) alors qu'une fonction concave croît de « moins en moins »(comme la fonction logarithme ou racine carré).

Exemple 11.2.1. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est bien convexe puisque sa dérivée $f'(x) = 2x$ est croissante (le coefficient directeur $a = 2 > 0$).

Exercices à traiter : 60 et 61 page 23.

En réfléchissant quelques instants, nous nous rendons compte que la monotonie d'une fonction peut s'étudier grâce au signe de la fonction dérivée. Ainsi, **pour étudier la monotonie de** f', il suffit (lorsque c'est possible) **d'étudier le signe de** f'' sa dérivée seconde.

Théorème 38 (Condition suffisantes II)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction* deux fois *dérivable. Les assertions suivantes sont alors vérifiées :*

- *f est convexe* convexe *sur l'intervalle I si et seulement si f'' est positive sur I.*
- *f est* concave *sur l'intervalle I si et seulement si f'' est négative sur I.*

Remarque. Ce théorème est encore plus simple d'emploi puisqu'il suffit de calculer f'' et d'étudier son signe pour l'appliquer. Il faut cependant s'assurer que la fonction est dérivable 2 fois, ce qui n'est pas toujours le cas (par exemple, cela n'est pas le cas de la fonction convexe $x \mapsto |x|$).

Voyons un exemple d'application.

Exemple 11.2.2. 1. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est convexe puisque $f''(x) = 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. La fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pour tout $x > 0$.

Exercices à traiter : 84 page 27 et 68 page 24.

11.3 Aspect géométrique

En classe de première vous avez constaté le fait suivant : si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ un point tel que

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ou

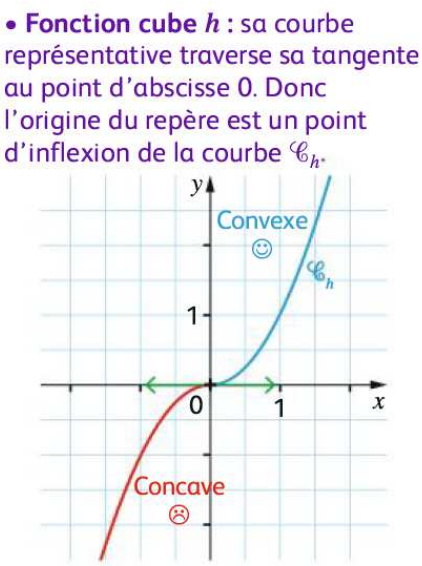
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

nous savions alors que $f(x_0)$ était soit **un minimum local** (1er tableau de signes) soit **un maximum local** (2ème tableau de signes). Que se passe-t-il si ceci se produit au niveau de la dérivée seconde ? Quelles en sont les conséquences pour sa représentation graphique ?

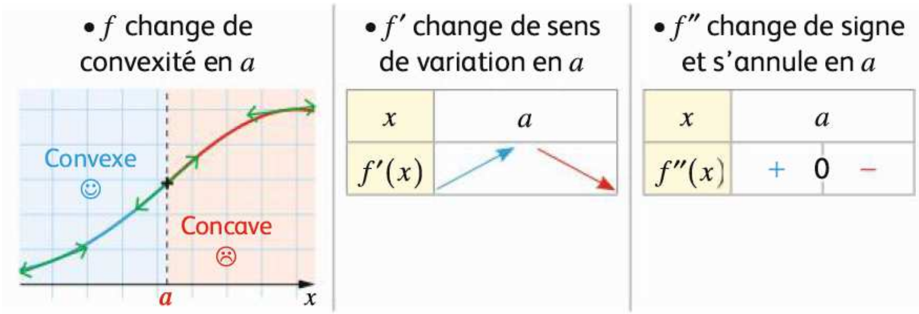
Définition 11.3.1. *La représentation graphique C_f d'une fonction f présente* ***un point d'inflexion*** *en x_0 si elle traverse sa tangente en ce point.*

Pour clarifier ceci, donnons immédiatement un exemple.

Exemple 11.3.1. La courbe associée à la fonction $x \mapsto x^3$ présente un point d'inflexion.



Remarque. En pratique, voici comment faire pour établir qu'une fonction possède un point d'inflexion. Cela peut s'effectuer de trois manières : graphiquement, via la monotonie de la fonction dérivée f' et enfin via le signe de la dérivée seconde f''. En résumé, voici ce qui pourrait se produire si f admet un point d'inflexion en a



Exercices à traiter : 59 page 23 ; 10 page 15 ; 60 page 23 et 87 page 28 en DM.