Chapitre 11

Fonctions de référence

11.1 Introduction

Depuis le début de l'année, nous avons manipulé de nombreuses expressions algébriques et étudié un certain type de fonctions : les fonctions affines. Dans ce chapitre, nous allons agrandir notre catalogue de connaissance en étudiant d'autres fonctions. Celles-ci sont dites de références car il s'agit de fonctions qui interviennent naturellement dans de nombreuses situations du « quotidien ».

Nous rappelons, à toutes fins utiles, qu'une fonction affine est de la forme $f(x) = ax + b$ avc $a, b \in \mathbb{R}$. Sa représentation graphique est une droite et ses variations sont déterminées par le signe du coefficient directeur a.

11.2 Fonction carré

Imaginons que Fanny souhaite réaliser une nappe de forme carrée. Pour cela, il se rend dans un magasin où le tissu qu'il a choisit est vendu au prix de 10 euros par m^2. Raphaël modélise cette situation à l'aide d'une fonction S qui a une longueur positive x, en m, associe la superficie $S(x)$ de la nappe en m^2 (il pourra ensuite déterminer prix du tissu nécessaire à la fabrication de cette nappe). Il complète ainsi le tableau suivant :

Longueur du côté x	0,3	0,5	1	1,4	2,2	3
Superficice $S(x)$	0,09	0,25	1	21,96	4,84	9

Après réflexion il constate qu'il a utilisé la fonction suivante.

Définition 11.2.1. *La fonction carré est définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^2$

Cette fonction intervient dans la modélisation de nombreux problèmes.

Exemple 11.2.1. La fonction carré intervient dans les situations suivantes :
- Prix d'une parcelle de terrain à partir de sa superficie.
- Quantité de pots de peinture permettant de repeindre une surface donnée.
- ....

Voyons ce qu'il est possible d'établir vis à vis des variations de cette fonction.

Proposition 28. *La fonction carré est croissante sur* $[0; +\infty[$ *et décroissante sur* $]-\infty; 0]$. *Autrement dit, nous avons le tableau de variation suivant.*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Remarque. 1. Deux réels positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.
2. Deux réels négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire.
3. La représentation graphique $y = x^2$ correspond à une parabole :

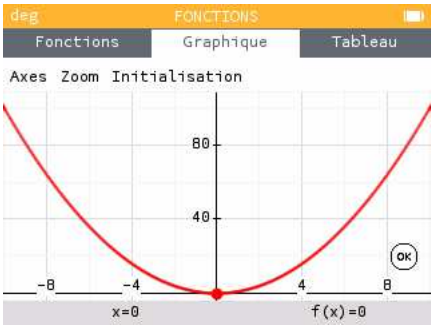

FIGURE 11.1: Fonction $x \mapsto x^2$

Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnée : ceci provient d'une propriété particulière de la fonction $x \mapsto x^2$; lorsqu'une fonction vérifie la relation suivante

$$f(-x) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

nous dirons que **la fonction est paire**, elle vérifie de plus une propriété de symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercices à traiter :

- 21, 22, 24 (question a,b,c) et 26 (questions a,b) page 195.
- 27 (questions a,b) et 28 (questions a,b), 33 (question 1, 2a et 2b) et 34 (question 1 et 2b) page 195.

11.3 Fonction racine carrée

Vous avez déjà rencontré cette fonction lorsque vous cherchiez à déterminer la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle (elle intervient notamment dans la formule permettant de calculer la longueur d'un segment d'un repère orthonormé).

Définition 11.3.1. *La fonction racine carrée est définie sur* $[0;+\infty[$ *et sera notée* $x \mapsto \sqrt{x}$.

Remarque.

1. Rappelons que cette fonction est définie comme suit : étant donné un nombre $b \geq 0$, nous dirons que $a = \sqrt{b}$ si
$$a \times a = a^2 = b.$$
2. De manière un peu grossière, cette fonction permet de « défaire le carré d'un nombre ». D'un point de vue plus géométrique, cela revient à déterminer le côté d'un carré lorsque nous connaissons l'aire de celui-ci.
3. Attention, avant la classe de Terminale, la racine carrée d'un nombre négatif n'a pas de sens.

Rappelons une propriété importante permettant de simplifier des racines carrées.

Proposition 29. *Soient* $a, b \geq 0$ *alors* $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Remarque. Attention, la propriété suivante n'est jamais vraie : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Pour s'en convaincre, il suffit de choisir $a = 16$ et $b = 9$. Avec un tel choix, nous avons bien d'un part $\sqrt{a+b} = \sqrt{25} = \pm 5$ tandis que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \pm 4 \pm 3$.

Voici un exemple d'application de ce qui précède.

Exemple 11.3.1.

1. $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.
2. $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Il sera également important de savoir supprimer une racine carrée d'un dénominateur.

Exemple 11.3.2. $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. ou encore $\frac{2}{1-\sqrt{3}} = \frac{2}{1-\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = -\frac{2-2\sqrt{3}}{2}$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est notamment utile pour résoudre des équations lorsqu'il n'y a pas de carré parfait.

11.3.1 Résolution d'équations

Les racines carrées sont utiles pour résoudre certaines équations :

Proposition 30. *Soit* $d \in \mathbb{R}_+$. *L'équation suivante*

$$(E) : \quad x^2 - d = 0$$

admet deux solutions : $x_1 = \sqrt{d}$ *et* $x_2 = -\sqrt{d}$.

Démonstration. En utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ (avec $a = x$ et $b = \sqrt{d}$), l'équation (E) peut s'écrire

$$x^2 - (\sqrt{d})^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x - \sqrt{d})(x + \sqrt{d}) = 0.$$

Il suffit ensuite d'utiliser la règle du produit nul pour conclure. □

Remarque. 1. Il est important d'utiliser l'identité remarquable pour ne pas oublier l'une des deux solutions. En pratique, lorsque nous ferrons de la géométrie et calculerons des distances, la racine négative sera régulièrement exclue car une telle valeur ne peut correspondre à une longueur.

2. Graphiquement, ces solutions correspondent aux abscisses des points d'intersection entre la courbe $x \mapsto x^2$ et l'axe (Ox).

Exemple 11.3.3. 1. L'équation $x^2 - 4 = 0$ admet deux solutions $x_1 = 2$ et $x_2 = -2$.

2. L'équation $x^2 - 8 = 0$ admet deux solutions $x_1 = 2\sqrt{2}$ et $x_2 = -2\sqrt{2}$.

11.3.2 Variations

Il est possible d'étudier la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+$ et admet les variations suivantes :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	$0 \nearrow$

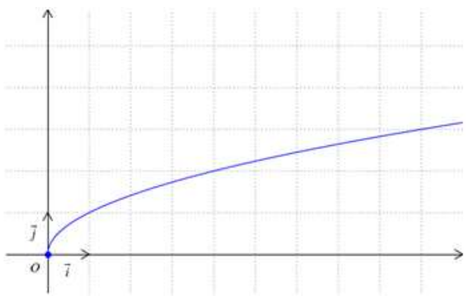

FIGURE 11.2: Fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

Exercices à traiter :

- 3 page 193 ; 61, 62 (questions a,b), 63 et 66 (questions a,b) page 197.
- 67 (questions a,b), 68 (question 1, 2a et 2b) et 69 (question 1 et 2a) page 197.
- (pour aller plus loin) 95p203.

11.4 Fonction cube

Voici une autre fonction intervenant dans d'autres types de problèmes (impliquant un volume par exemple) il s'agit de la fonction qui a un nombre réel lui associe son cube. Voici ses variations.

Proposition 31. *La fonction $x \mapsto x^3$ est définie sur $\mathbb{R}$ et admet les variations suivantes :*

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	$\nearrow$	

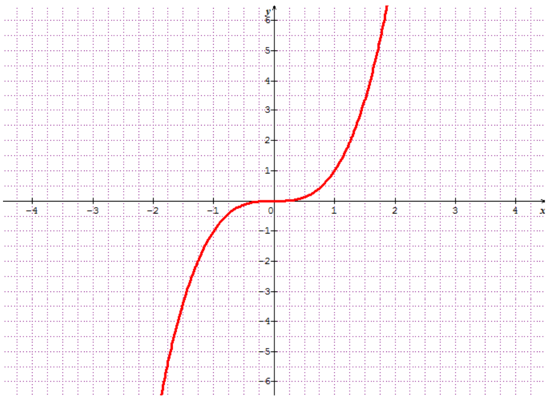

FIGURE 11.3: Fonction $x \mapsto x^3$

Remarque. Observons que la courbe passe par l'origine $(0, 0)$ puisque $f(0) = 0$. Elle vérifie également une propriété de symétrie centrale par rapport à ce même point. Il n'est pas difficile de montrer que l'identité suivante est vérifiée :

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lorsque ce genre d'égalité est satisfaite, il est usuel de dire que la fonction est **impaire**.

Exercices à traiter :

- 6 page 193 ; 51 (questions a,b,c), 55 (questions a,b) page 197.
- 56 (questions a), 57 page 197.
- (pour aller plus loin) $87p202$.

11.5 Fonction inverse

La fonction inverse intervient de dans nombreux domaines. Par exemple :

- Raphaël souhaite s'inscrire dans une salle de musculation et constate que l'abonnement mensuel coûte 35 euros. Il se demande à combien lui revient le prix d'une entrée s'il va à une séance par semaine.
- La loi d'Ohm, nous assure que $U = R \times I$ par conséquent la résistance s'exprime comme $R = \frac{U}{I}$.
-

Définition 11.5.1. *La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}_* =]-\infty : 0[\cup]0;+\infty$. Il s'agit de la fonction f qui a tout réel non nul associe son inverse.*

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \textit{pour} \quad x \in \mathbb{R}_*$$

Remarque. La fonction inverse n'est pas définie en 0, il est usuel de dire que 0 est une valeur interdite pour la fonction inverse.

Voici son tableau de variation ainsi que sa représentation graphique :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

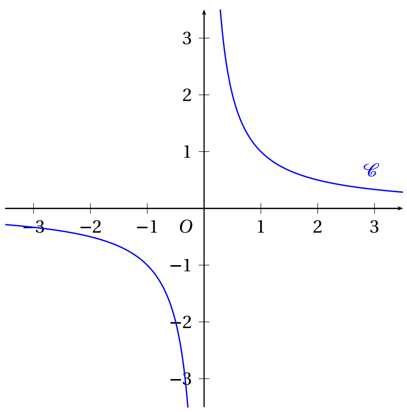

FIGURE 11.4: La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ s'appelle une hyperbole

Remarque. Autrement dit, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. En conséquence, deux réels (non nuls) de même signe et leurs inverses sont rangés dans des ordres contraires.

Exemple 11.5.1.

Puisque $2 \leq 4$ nous avons $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$.

Exercices à traiter :

- $35, 36$ page 195 ; 40 (questions a,b,c), 44 (questions a,b) page 196.
- 45 (questions 1 et 2a,b,d), 46 page 196.
- (pour aller plus loin) $89p202$.

11.6 Position relative de courbes

Supposons que nous ayons à disposition deux fonctions g et f de courbes associées C_f et C_g. Nous souhaiterions savoir à quel moment la courbe C_f se trouve au dessus de la courbe C_g (et vice versa). Voici comment procéder :

Proposition 32. *La position relative entre deux courbes est donnée par la signe de la différence* $f(x) - g(x)$ *:*

1. *Si* $f(x) - g(x) > 0$ *sur un ensemble* I*,* C_f *est au dessus (strictement) de* C_g *sur cet ensemble de points.*
2. *Si* $f(x) - g(x) = 0$ *sur un ensemble* I*,* C_f *coupe* C_g *sur cet ensemble de points.*
3. *Si* $f(x) - g(x) < 0$ *sur un ensemble* I*,* C_f *est au dessous (strictement) de* C_g *sur cet ensemble de points.*

Exemple 11.6.1. Comparons la position relative de $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^3$. Pour cela, nous étudions le signe de

$$h(x) = x^2 - x^3 = x^2(1 - x).$$

Nous obtenons alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de $1 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

En résumé, C_f est au dessous de C_g lorsque $x \in]1; +\infty[$, C_f coupe C_g aux points $x = 1$ et $x = 0$, sinon C_f est au dessus de C_g.

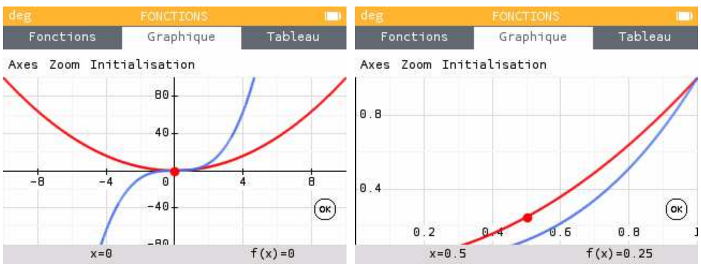

FIGURE 11.5: Position relative de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$

Nous pourrions traiter d'autres exemples des positions relatives :

- $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$
- $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$
- ...

Exercices à traiter :

- $82, 91$ page $201 - 202$.