Chapitre 11

Loi à densité (2ème partie)

Poursuivons notre étude de loi à densité.

11.1 Loi exponentielle

La loi exponentielle est pertinente lorsque nous souhaitons modéliser certains évènements aléatoires. Par exemple, elle intervient lorsque l'on s'intéresse à la durée de vie d'un matériel électronique. Elle apparaît également en radioactivité : la durée de vie d'un élément radioactif suit une loi exponentielle. Elle est également présente lorsque l'on cherche à modéliser des files d'attentes. En effet, il est usuel de modéliser l'arrivée de nouveaux clients dans la file par une loi exponentielle.

Définition 11.1.1. *Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si elle admet pour densité de probabilité la fonction $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour tout $x \geq 0$. En particulier,*

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx \quad \textit{pour tout} \quad 0 \leq a < b$$

De manière abrégée, nous noterons $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ pour signifier que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Remarque. Observons que $F(x) = -e^{-\lambda x}$ (avec $x \geq 0$) est une primitive de f.

Exemple 11.1.1. Soit $X \sim \mathcal{E}(0,02)$ alors

$$\mathbb{P}(20 \leq X \leq 50) = \int_{20}^{50} 0,02 e^{-0,02x} dx = [-e^{-0,02x}]_{20}^{50} = e^{-0,4} - e^{-1} \approx 0,302.$$

et

$$\mathbb{P}(X \leq 100) = \int_0^{100} 0,02 e^{-0,02x} dx = [-e^{-0,02x}]_0^{100} = 1 - e^{-2} \approx 0,865.$$

Notons que X ne prend que des valeurs positives.

A nouveau, il est possible de calculer espérance et l'écart-type d'une loi exponentielle.

Proposition 23. *Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ alors*
- *son espérance vaut $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$.*
- *son écart-type vaut $\sigma[X] = \frac{1}{\lambda}$.*

Exercices à traiter : 1 à 3 de la feuille associée.

11.2 Loi de Poisson

Découvrons une dernière loi de probabilité : la loi de Poisson. Il est possible de penser cette loi comme un loi binomiale (nous détaillerons ce point dans la section suivante) pour laquelle la probabilité de succès est très faible et le nombre de répétitions très grand. Par exemple, le nombre de fautes de frappes dans un livre peut se modéliser par un loi de Poisson.

Voyons un autre exemple. Dans un atelier, l'alimentation électrique est soumises à des micro-coupures aléatoires, indépendantes les unes des autres et supposons que le temps d'attente entre deux micro-coupures suive une loi exponentielle. Alors, la variable aléatoire X qui compte le nombre de micro-coupures sur un plage horaire fixée suit une loi de Poisson.

Contrairement à une loi uniforme, une loi normale ou une loi exponentielle, la loi de Poisson est une variable aléatoire discrète : les calculs n'impliquent pas d'intégrales.

Définition 11.2.1. *Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (en abrégé $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) lorsque pour tout entier k,*

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Remarque. Pour tout entier k, le nombre $k!$ (se lit « k factoriel ») est une notation pour designer le nombre

$$k! = k(k-1)(k-2)\dots 2 \times 1.$$

Par exemple, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Par convention $0! = 1$.

Exemple 11.2.1. La variable aléatoire X mesurant le nombre de clients se présentant à l'accueil d'une maison de santé, par intervalle de temps de durée de 10 minutes, entre $14h30$ et $16h30$, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

Calculer la probabilité que 6 personnes se présentent à l'accueil entre $15h$ et $15h10$. Autrement dit, nous voulons calculer

$$P(X = 6) = e^{-5}\frac{5^6}{6!} \approx 0,146.$$

Remarque. Bien entendu, ces calculs sont effectués à l'aide de la calculatrice. La manipulation est résumée dans la vidéo suivante : https://www.youtube.com/watch?v=mFQ9WxUqu2o.

Voici les paramètres associés à un loi de Poisson.

Proposition 24. *Si* $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ *avec* $\lambda > 0$ *alors*
- *son espérance vaut* $\mathbb{E}[X] = \lambda$.
- *son écart-type vaut* $\sigma[X] = \sqrt{\lambda}$.

Comme nous l'avions constaté dans le chapitre précédent, il était possible d'approcher une loi de Poisson par une loi binomiale.

Exercices à traiter : 4 à 6 de la feuille associée.

11.3 Approximation d'une loi de Poisson par une loi binomiale

Théorème 25 (de la limite centrale poissonnienne)**.** *Si*

1. *n est suffisament grand* ($n \geq 30$)
2. *p proche de* 0 ($p \leq 0,1$)
3. *np pas trop grand* ($np \leq 10$)

alors la loi binomiale de paramètre $B(n; p)$ *est proche de la loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$ *avec* $\lambda = np$.

Exercices à traiter : 7 à 9 de la feuille associée.