Chapitre 12

Produit scalaire (partie 2)

Dans ce chapitre, nous allons poursuivre l'étude géométrique (du produit scalaire) entamée plus tôt dans l'année tout en faisant le lien avec les notions vues en classe de seconde (vecteur directeur, équation cartésiennes de droites). A nouveau, dans ce qui suit, nous munirons le plan d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; les coordonnées des points que nous allons considérer par la suite seront exprimées dans ce repère.

12.1 Rappels sur les droites et les vecteurs directeurs

Voici de brefs rappels concernant les droites dans le plan.

12.1.1 Equation cartésienne d'une droite

Définition 12.1.1. *Toute équation de la forme*

$$(E) : \quad ax + by + c = 0$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est appelée équation cartésienne d'une droite.

Proposition 42. *A toute droite (d) du plan il est possible d'associer une équation cartésienne où le couple $(a, b) \neq (0, 0)$ et réciproquement.*

Remarque.

1. Une droite (d) peut admettre plusieurs représentations cartésiennes.
2. Les équations cartésiennes peuvent s'écrire sous forme d'équation réduite de droite :
   - Si (d) n'est pas parallèle à l'axe (Oy) alors (d) a une équation de la forme

     $$y = mx + p$$

     où $m \in \mathbb{R}$ est le coefficient directeur de la droite et $p \in \mathbb{R}$ est l'ordonnée à l'origine.

   - Si (d) est parallèle à l'axe (Oy) alors (d) a une équation de la forme

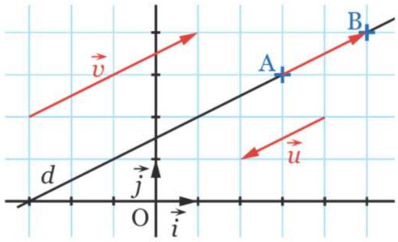
     $$x = k$$

     avec $k \in \mathbb{R}$.

12.1.2 Vecteur directeur

Le lien entre droites et calcul vectoriel s'effectue via la notion de vecteur directeur.

Définition 12.1.2. *Un vecteur directeur d'une droite (d) est un vecteur dont la direction est parallèle à celle de (d).*



Remarque. En particulier, si A et B sont des points appartenant à la droite (d) alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (d). Rappelons également le fait suivant : si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (d) alors $k\overrightarrow{u}$ avec $k \in \mathbb{R}_*$ l'est également.

Voyons à présent de quelle manière il est possible d'obtenir un vecteur directeur à partir d'une équation cartésienne de droite.

Proposition 43. *Soit (d) une droite du plan d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, alors $\overrightarrow{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (d).*

Remarque. Il est même possible d'avoir la caractérisation suivante des points M appartenant à la droite (d).

$$M \in (d) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont colinéaires.}$$

avec $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de la droite et $A \in (d)$.

Exemple 12.1.1. Dans un repère, déterminons une équation cartésienne de la droite (d) définie par le point $A(-1; 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(3; 2)$.

Puisque $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (d), cela signifie que cette droite admet une équation cartésienne de la forme (E) : $\quad 2x - 3y + c = 0$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$. De plus, le point $A \in (d)$ dont ses coordonnées vérifient l'équation (E). Autrement dit, $2 \times (-1) - 3 \times (-3) + c = 0$ d'où $c = 5$.

Enfin, voici une condition de parallélisme entre deux droites à partir de leurs vecteurs directeurs.

Proposition 44 (Condition de parallélisme)**.** *Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.*

Remarque. Cette condition peut se vérifier à l'aide du déterminant :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx.$$

Lorsque celui-ci vaut 0, les vecteurs impliqués sont colinéaires.

Exemple 12.1.2. 1. Considérons les droites suivantes :

$$d\ :\ 4x-6y+1=0 \quad \text{et} \quad d'\ :\ -6x+9y+3=0$$

Alors $\overrightarrow{u}=(6;4)$ dirige d et $\overrightarrow{v}=(-9;-6)$ dirige d'. De plus, $\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=-36+36-2=0$, ainsi les vecteurs sont colinéaires et les droites sont donc parallèles.

2. Considérons les droites suivantes :

$$d\ :\ 2x-y-3=0 \quad \text{et} \quad d'\ :\ -x-y+3=0$$

Alors $\overrightarrow{u}=(1;2)$ dirige d et $\overrightarrow{v}=(1;-1)$ dirige d'. De plus, $\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=-1-2=-3\neq 0$, ainsi les vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites sont donc sécantes. Soit $A(x;y)$ le point d'intersection de celles-ci, déterminons ces coordonnées en résolvant le système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-y-3=0 \\ -x-y+3=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x-y-3=0 \\ 2\times(-x-y+3)=2\times 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} 2x-y-3=0 & : & L_1 \\ -2x-2y+6=0 & : & L_2 \end{array}\right.$$

Observons à présent que l'addition (membre à membre) de la ligne L_1 avec la ligne L_2 supprime la variable x de l'équation et permet de trouver la valeur de y. En effet,

$$(2x-y-3)+(-2x-2y+6)=0 \quad\iff\quad -3y+3=0 \quad\iff\quad y=1.$$

Ainsi, en substituant la valeur de y dans la ligne L_1 (par exemple), nous en déduisons que

$$2x-1-3=0 \quad\iff\quad x=2.$$

Remarque. La méthode employée sur le deuxième exemple porte le nom de « pivot de Gauss »et permet de résoudre simplement des systèmes d'équations linéaires. L'avantage de cette procédure est quelle est très robuste et se généralise facilement à des systèmes plus complexes (3 inconnues, trois équations par exemple).

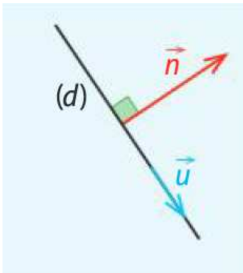
Exercices à traiter : $7, 9$, 15 (questions a et b) page 266 et 17 page 267 (dans la question 1, remplacez le mot *perpendiculaires* par sécantes).

12.2 Droite et produit scalaire

En seconde, vous avez étudié la notion de parallélisme à l'aide de vecteurs directeurs. Plus tôt dans l'année, nous avons rencontré la notion de produit scalaire qui permet d'aborder la notion d'angles droit. Nous allons maintenant voir comment relier produit scalaire et droites.

12.2.1 Vecteur normal à une droite

Définition 12.2.1. *Dire qu'un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est normal à une droite (d) signifie que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de (d).*



Remarque. En conséquence de ceci, il est possible de reformuler, en termes vectoriels, des notions de géométrie du collège :

1. Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à (d) et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de (d), nous avons
   - $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de toute droite (d') perpendiculaire à (d).
   - $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal à toute droite (d') perpendiculaire à (d).
2. Soient (d) et (d') deux droites ayant respectivement $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ pour vecteurs normaux, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ pour vecteurs directeurs. Il est élémentaire de vérifier les propriétés suivantes.

$$d \perp d' \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u'} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{n} \text{ et } \overrightarrow{u'} \text{ sont colinéaires}$$

Exemple 12.2.1. Si $\mathcal{D}$ a pour équation cartesienne $2x - 3y + 5 = 0$ et nous savons que $\overrightarrow{u} = (3; 2)$ est un vecteur directeur. Il n'est pas difficile de vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n} = (2; -3)$ est un vecteur normal à cette droite.

Exercice à traiter : exercice 18 page 279 et 58 page 282.

12.2.2 Vecteur normal et équation de droite

Nous avions déterminé des équations cartésiennes de droites à l'aide de vecteur directeur, nous allons voir qu'il est possible de faire de même à l'aide d'un vecteur normal.

Proposition 45. *Une droite (d) a pour une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ (avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$) si et seulement si $\overrightarrow{n} = (a, b)$ est un vecteur normal à (d).*

Remarque. Voici quelques conséquences de cette proposition. Soient (d) et (d') deux droites admettant les équations cartésiennes respectives :

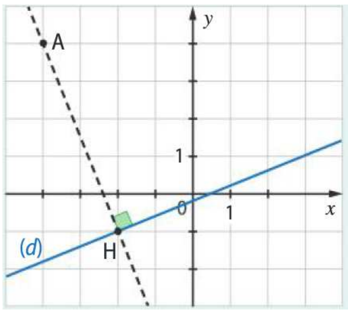
$$(d)\ :\ ax+by+c=0 \quad \text{et} \quad (d')\ : \quad a'x+b'y+c'=0.$$

1. $(d) \perp (d') \iff aa'+bb'=0 \iff \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n'}=0$. Autrement dit, les droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

2. $(d)//(d') \iff ab'-ba'=0 \iff \det(\overrightarrow{n};\overrightarrow{n'})=0$. Autrement dit, les droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Ce genre de considérations permet notamment de déterminer les coordonnées d'un projeté orthogonal.

Exemple 12.2.2. Soient $A(-4;4)$ un point du plan et (d) une droite d'équation cartésienne $-2x+5y+1=0$. Nous souhaitons déterminer les coordonnées du projeté orthogonal $H(x;y)$ de A sur (d).



Le but est le suivant : nous allons déterminer l'équation cartésienne de la droite (AH), nous justifierons ensuite que $(AH)\perp(d)$ pour ensuite déterminer les coordonnées du point d'intersection.

Puisque H est le projeté orthogonal de A sur (d), les droites (AH) et (d) sont perpendiculaires. En particulier, tout vecteur normal à (d) sera un vecteur directeur de (AH). Or $\overrightarrow{n}=(-2;5)$ est un vecteur normal à (d), il dirige donc (AH).

Puisque $\overrightarrow{n}$ dirige (AH), nous savons que cette droite admet une équation cartésienne de la forme

$$5x+2y=c=0 \quad \text{avec} \quad c\in\mathbb{R}.$$

Puisque $A\in(AH)$, nous savons également que

$$5x_A+2y_A+c=0 \iff -20+8+c=0 \iff c=12.$$

Remarque : nous aurions pu obtenir directement l'équation cartésienne de (AH) en remarquant le fait suivant : si $M(x,y)\in(AH)$ alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires (puisque $\overrightarrow{n}$ dirige (AH)).

Autrement, dit $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{n}) = 0$. *Il suffit alors d'exprimer cette dernière égalité à l'aide des coordonnées pour trouver l'équation cartésienne de* (AH).

Maintenant que nous avons les équations cartésiennes de deux droites sécantes, il ne reste plus qu'à déterminer les coordonnées du point d'intersection H. Celles-ci vérifient le système suivant

$$\left\{\begin{array}{ll} -2x+5y+1=0 & L_1 \\ 5x+2y+12=0 & L_2 \end{array}\right.$$

Il convient de multiplier L_1 par 5 et L_2 par 2 de sorte que $L1+L_2$ fasse disparaitre la variable x.

$$\left\{\begin{array}{ll} -10x+25y+5=0 & L_1 \\ 10x+4y+24=0 & L_2 \end{array}\right.$$

Donc L_1+L_2 entraine que $29y+29=0 \iff y=-1$. En substituant ce résultat dans L_1, on trouve que $x=-\frac{20}{10}=-2$. En résumé, les coordonnées de H sont $(-2;-1)$.

Exercices à traiter : 21 (question a et b), 22, 23 (questions a et d), 25 et 27 page 279 ; 59 page 282.

A présent, nous allons poursuivre notre étude de la géométrie du plan à l'aide du produit scalaire.

12.3 Cercle et produit scalaire

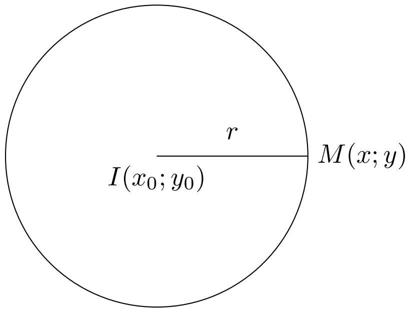
Dans ce qui suit, nous allons voir que le produit scalaire est également un outil qui permet d'obtenir des équations de cercles.

12.3.1 Equation d'un cercle défini par son centre et son rayon

Il est possible de montrer que les cercles sont des ensembles du plan caractérisés par leur centre et leur rayon.

Définition 12.3.1. *L'équation cartésienne d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(x_0; y_0)$ et de rayon r est*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{12.3.1}$$



Remarque. Observons qu'il s'agit simplement d'une reformulation du fait suivant : $M(x; y)$ est un point du cercle $\mathcal{C}$ équivaut à $IM^2 = r^2$.

Exemple 12.3.1. 1. L'équation $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 12$ est l'équation cartésienne d'un cercle de centre $I(-1; 2)$ et de rayon $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

2. Montrons que l'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ correspond à l'équation cartésienne d'un cercle. Pour cela, il suffit de faire apparaitre des carrés en utilisant des arguments de forme canoniques.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 &= 0 \\ (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 4 &= 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 &= 9 \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un cercle de centre $I(2; -1)$ et de rayon $r = 3$.

Remarque. Tout cercle admet une équation de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ mais la réciproque est fausse. Par exemple, il est possible de montrer que l'ensemble des points $M(x; y)$ tel que

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$$

est l'ensemble vide. Ce n'est dont pas l'équation cartésienne d'un cercle.

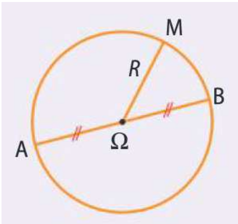
Exercices à traiter : 30 et 33 page 280.

Dans la section suivante, nous allons présenter une autre façon de caractériser un cercle.

12.3.2 Equation d'un cercle défini par son diamètre

Il est possible de définir un cercle à partir de l'un de ses diamètres $[AB]$.

Proposition 46. *M est un point du cercle $\mathcal{C}$ équivaut à* $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.



Remarque. 1. Ce résultat permet d'obtenir l'équation d'un cercle à partir de deux de ses points, diamétralement opposés, A et B.

2. Forcément, le centre du cercle Ω correspond au milieu du segment $[AB]$ et le rayon vaut $R = \frac{AB}{2}$.
3. Si $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $M(x, y)$ alors l'équation vectoriel peut s'exprimer à l'aide des coordonnées

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x_A - x)((x_b - x) + (y_A - y)(y_B - y) = 0.$$

Exemple 12.3.2. Soient $A(1; 1)$ et $B(-2; 3)$ les extrémités d'un diamètre d'un cercle $\mathcal{C}$. Déterminons une équation cartésienne de celui-ci. Soit $M(x; y) \in \mathcal{C}$, d'après le résultat précédent il suffit de calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$. Ici, nous avons

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (1 - x)(-2 - x) + (1 - y)(3 - y) = x^2 + y^2 + x - 3y + 4$$

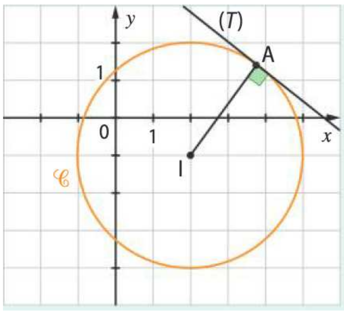
Donc l'équation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est équivalente à $x^2 + y^2 + x - 4y + 1 = 0$. Il est important de vérifier au moins une fois qu'il s'agit bien de l'équation d'un cercle :

$$x^2 + y^2 + x - 4y + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x + \frac{1}{2})^2 + (y - 2)^2 - \frac{13}{4} = 0$$

Il s'agit bien de l'équation d'un cercle de rayon $\frac{\sqrt{13}}{2}$ et de centre $C(-\frac{1}{2}; 2)$.

Rappelons qu'une droite (T) est tangente à un cercle C (de centre I et de rayon r) en un point $A \in C$ si elle passe par A et si tout vecteur directeur de (T) est orthogonal à $\overrightarrow{IA}$. Voyons comment déterminer une équation cartésienne de (T).

Exemple 12.3.3. Soient C un cercle d'équation cartésienne $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ (i.e. de centre $I(2; -1)$ et de rayon $r = 3$) et $A(3, 9; 1, 4)$ un point du cercle. Nous cherchons à déterminer l'équation de la tangente (T) à C au point A.



Pour cela, observons que $\overrightarrow{IA}$ est un vecteur normal à (T). De plus, $M(x;y) \in (T)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont orthogonaux. Autrement dit,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{IA} &= 0 \\ \iff (x-3,8)\times 1,8 + (y-1,4)\times 2,4 &= 0 \\ \iff 1,8x + 2,4y - 10,2 &= 0. \end{aligned}$$

En conclusion, $1,8x + 2,4y - 10,2 = 0$ est une équation cartésienne de (T).

Exercices à traiter : 32, 29 page 280 et 46 page 280 ; 72, 73 page 283.

12.4 Autres applications géométriques

Voici deux applications géométriques reposant sur une utilisation du produit scalaire. Dans ce qui suit ABC désigne un triangle scalène (quelconque). Selon l'usage, nous posons

$$BC = a, \quad AC = b \quad \text{et} \quad AB = c.$$

Les angles de sommets respectifs A, B et C sont notés $\widehat{A}, \widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

12.4.1 Théorème d'Al-Kashi

Il s'agit d'une « généralisation » du théorème de Pythagore.

Théorème 47 (Al-Kashi)**.** *Soit ABC un triangle scalène alors*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$$

Remarque. En particulier, si ABC est un triangle rectangle en A nous retrouvons l'égalité entre les carrés des longueurs du Théorème de Pythagore. Il est également possible d'échanger le rôle des longueurs a, b et c afin d'obtenir

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{b}) \quad \text{ou} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{c})$$

Ce théorème est notamment utile pour déterminer les mesures des angles $\widehat{A}, \widehat{B}$ et $\widehat{C}$ lorsque les longueurs a, b et c sont connues.

Démonstration. D'après la relation de Chasles, nous avons

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

C'est pourquoi, $b^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$. Or, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AC \times \cos(\widehat{A})$ d'où le résultat. □

Exercice à traiter : $59, 57$ page 254.

12.4.2 Théorème de la médiane

Rappelons que la médiane d'un triangle est une droite qui passe pas l'un des sommets de celui-ci et coupe en son milieu le côté opposé.

Théorème 48 (Théorème de la médiane)**.** *Soient ABC un triangle et $I = m[BC]$ alors*

$$b^2 + c^2 = 2AI^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Démonstration. D'après la relation de Chasles, nous avons

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}$$

Donc $b^2 + c^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB})^2 = AI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + AI^2 + IB^2 - 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB}$. Ainsi

$$b^2 + c^2 = 2AI^2 + 2IB^2$$

or $IB = \frac{a}{2}$, d'où le résultat. □

Exercice à traiter : 48 page 281.

12.5 Pour en savoir plus

12.5.1 Quelques remarques sur la géométrie non euclidienne

Au début de ce chapitre nous avons annoncer que nous allions étudier la géométrie euclidienne d'un point de vu vectoriel. Cet énoncé sous-entend qu'il existerait des géométries *non euclidienne*. Que pourraient-elles êtres et quelles seraient les différences avec la géométrie enseigner dans l'enseignement primaire et secondaire ?

Pour mieux comprendre ceci il est utile de revenir aux *Eléments* d'Euclide. Dans son traité, Euclide construit toute la géométrie que nous connaissons (propriétés des triangles équilatéraux, etc,...) à l'aide de raisonnements logico-déductif à partir d'une liste de cinq axiomes. Par exemple : « *un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts* »dont la véracité semble tellement évident à nos yeux qu'il ne parait pas déraisonnable de supposer une telle assertion vraie. En revanche, parmi ces axiomes, l'un d'entre eux est un peu particulier : après reformulation, celui-ci s'énonce comme suit

Par un point extérieur à une droite, il passe toujours une parallèle à cette droite, et une seule.

Cette affirmation ressemble étrangement à la conclusion d'un Théorème qui n'aurait pas de démonstration. Cela à intriguer les mathématiciens, notamment Sacherri qui tenta, au 17ème siècle, de manière infructueuse, de proposer une démonstration par l'absurde de cette assertion. En 1813, Gauss écrit : « Pour la théorie des parallèles, nous ne sommes pas plus avancés qu'Euclide, c'est une honte pour les mathématiques ». Il fallu encore un peu de temps aux mathématiciens pour découvrir ces nouvelles géométries.

Une manière, peut-être un peu grossière, de mettre en évidence l'existence de celles-ci est de parler de plus court chemin : si nous dessinons deux points A et B sur une feuille, ils nous semblent évident que le plus court chemin pour aller de l'un à l'autre est la ligne droite. Que se produirait-il si nous placions ses points à la surface de la Terre, l'un à Tokyo et l'autre à Lille par exemple ? Déj), il semble un peu plus délicat de parler de ligne droite à la surface de la Terre ...

La Terre nous fournit un premier exemple sur lequel il est possible de faire de la géométrie non euclidienne, il s'agit de la géométrie sphérique. En effet, celle-ci propose des différences notoire avec ce que nous connaissons : le Théorème de Pythagore n'est plus vérifié si nous dessinons un triangle sur un ballon ! Il est même possible de dessiner sur ce même ballon un triangle possédant trois angles droits ! Cette géométrie diffère de celle d'Euclide car le ballon est courbé (positivement) tandis que notre feuille de dessin est toute plate.

Il est également possible de parler de courbure négative en faisant de la géométrie hyperbolique. A titre d'exemple, il est facile de décrire celle-ci : il suffit de prendre l'intérieur d'un bol et d'imaginer que des petits êtres vivent à l'intérieur. Du fait de sa courbure, il est beaucoup plus difficile et plus long, pour eux, de se déplacer vers le bord de ce bol tandis qu'il est plus aisé de se promener vers le centre de ce même bol. Ainsi, le plus court chemin entre deux points de ce bol ne correspondrait pas à des lignes droites mais plutôt à des arcs de cercles où les individus chercheraient à se rapprocher, dans un premier temps, du centre avant de s'éloigner à nouveau vers leur destination.

Bien entendu, ces géométries sont plus complexes à enseigner que celle d'Euclide mais elles n'en sont pas moins passionnantes. Voici quelques grands mathématiciens qui ont contribué à faire évoluer (bien longtemps après les découverts d'Euclide) l'étude de géométrie non-euclidienne : Lobatchevski en 1829, Riemann en 1867 ou encore Poincaré en 1902.

Ces géométries peuvent sembler un peu étranges, voir abstraites et n'être que des jeux auxquels se prêtent les mathématiciens. Il n'en est rien ! A titre d'exemple, la géométrie sphérique peut-être utiliser en aviation (pensez au vol Tokyo-Lille), mais le plus frappant est peut-être la découverte de la relativité (en 1905 puis 1915) par Einstein dont les modèles mathématiques « d'espace-temps »reposent sur de la géométrie non euclidienne.

12.5.2 Curiosité en grande dimension

Il n'est pas vraiment possible pour l'être humain de se représenter un objet en quatre dimension (ou plus). Il est cependant possible de conceptualiser ce qui doit se produire. Imaginons que nous surplombions un monde vivant dans une feuille en papier, un monde en deux dimension. Si nous prenions un cube de notre univers, les habitants de ce monde ne pourraient l'apercevoir qu'au moment ou une partie du cube traverse la feuille de papier et pénètre dans leur monde. En faisant ceci, les habitants observeraient une tranche du cube et seraient face à un carré. Il n'est donc pas difficile de généraliser ce procédé en se disant que si des êtres nous observaient depuis un monde en quatre dimension et s'amusaient à vouloir nous montrer un cube de leur univers (en quatre dimensions) nous ne verrions qu'une tranche de celui-ci et ferions face à un cube normal.

Bien que notre intuition soit un peu gênée par des espaces de dimension supérieurs à trois, ces ensembles interviennent très rapidement lors de l'étude de certains problèmes. En effet, grossièrement, ajouter une dimension revient à considérer un paramètre supplémentaire. Par exemple, pour décrire le mouvement d'un oiseau nous avons besoin de connaître sa position dans l'espace. En revanche, il est possible que nous ayons également besoin de connaitre la durée de son mouvement, la pression atmosphérique, la température, etc . . . la considération de ceci force à introduire plus de dimensions pour prendre en compte ces nouveaux paramètres. En statistiques, certains problèmes de modélisation comme la météorologie met en jeu plusieurs milliers de paramètres.

L'un des intérêts majeur des coordonnées cartésiennes est que nous pouvons étudier des choses qui dépasse notre imagination. En effet, pour ajouter une dimension il suffit d'ajouter une coordonnée à notre vecteur. Il devient donc possible de faire des calculs sur des choses que nous ne pouvons visualiser. Cela va parfois à l'encontre de notre intuition. Voyons ceci au travers d'un exemple.

Débutons dans le plan et considérons un carré de côté 4 dont le centre est placé en $(0, 0)$. Plaçons des disques de rayon 1 dans les zones suivantes : un premier disque centré au point $(1; 1)$, un deuxième en $(1; -1)$, un autre en $(-1; 1)$ et un dernier en $(-1; -1)$. Il est alors possible de placer un dernier disque en $(0; 0)$ puis de l'agrandir jusqu'à ce qu'il touche les quatre disques que nous avons disposer. dans le carré au préalable.

Bien sûr, il est possible de procéder de manière similaire dans l'espace. Cette fois-ci nous avons un cube de côté 4, 8 boules de rayon 1 centrées aux points $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$ et enfin une dernière boule placée en $(0;0;0$ dont le rayon est plus grand possible (avec pour condition que cette nouvelle boule ne puisse empiéter sur les autres).

A vrai dire, pourquoi s'arrêter en si bon chemin ? Il n'est plus possible de faire de dessin mais nous pouvons imaginer un hypercube de côté 4 (que nous noterions $[-2;2]^d$) en dimension d et placer des boules aux points $(\pm 1;\ldots,\pm 1)$ comme auparavant pour enfin placer une dernière boule au centre avec les mêmes restrictions qu'auparavant.

A partir de quelle dimension cette dernière boule dépasse du cube $\quad [-2;2]^d$?

De manière intuitive, nous serions tenter de répondre : jamais ! Voyons ce que nous disent les calculs. Nous avons vu que la distance d'un point $M=(x_1;x_2)$ à l'origine valait

$$d(O,M)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

En dimension d, il s'agit de la même formule. C'est-à-dire, si M a pour coordonnées $(x_1;x_2;\ldots,x_d)$ (il n'est plus vraiment possible de parler d'abscisses ou d'ordonnées, nous numérotons donc les coordonnées par des nombres $x_1,\ldots,x_d$) nous avons la formule suivante :

$$d(O,M)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_d^2}$$

Or, dans le problème que nous considérons les points M, centres des boules, ont des coordonnées de la forme $(\pm 1;\ldots;\pm 1$ donc $d(O,M)=\sqrt{d}$. Ainsi, puisque ces boules sont de rayon 1, cela entraine que le plus grand rayon possible pour la boule centrale vaut $\sqrt{d}-1$. En conséquence, la boule centrale déborde du cube si

$$\sqrt{d}-1>2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad d>9$$

ce qui n'était pas du tout intuitif. En fait, il est même possible de préciser ce résultat. Il s'agit d'un domaine des mathématiques qui s'appelle *la concentration de la mesure*. L'un des résultats de cette théorie permet d'affirmer que le volume de la boule centrale restant dans le cube s'approche très vite (exponentiellement vite) de zéro lorsque la dimension devient de plus en plus grande.

12.5.3 Distance

La distance que nous venons de voir s'appelle la distance euclidienne. Il existe d'autre façon de mesurer la distance entre deux points, l'une d'elle s'appelle la distance de « Manhattan » (en rapport avec le quartier de New-York). La raison derrière cette terminologie est la suivante : la plupart des villes américaines sont construites sur la forme d'un quadrillage. Ainsi, pour rejoindre un point A à un point B de la ville, nous sommes forcés de suivre ce quadrillage et d'arpenter les côtés des carrés de ce quadrillage. Ainsi, la distance calculée correspond à celle qui est effectivement parcouru à pied plutôt que celle obtenue « à vol d'oiseau ».

Formellement, si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, alors

$$AB=|x_A-x_B|+|y_A-y_B|$$

où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue d'un nombre réel. Cette formulation n'engendre que très peu de différences notables avec la géométrie classique (grossièrement tout diffère d'une constante multiplicative universelle). En revanche, certain objets bien connu sont un peu modifiés. Pour voir cela nous devons adopter quelques notations : $d_2(A, B)$ pour désigner la distance euclidienne (celle vu en cours) entre deux points et par $d_1(A, B)$ pour la distance de Manhattan. Avec ces notations, il est possible de définir un disque de centre A et de rayon $r > 0$ comme étant l'ensemble des points M vérifiant :

$$d_2(A, M) \leq r$$

et nous obtiendrons la figure classique que vous avez pu rencontré au collège. En revanche, si nous remplaçons d_2 par d_1 dans le formule précédente, notre cercle prendra alors la forme d'un carré !

Il existe d'innombrables distances en mathématiques, chacune ayant une utilité, les quelques mots précédents ne font qu'effleurer la surface de cette notion.