Chapitre 2

Dérivées et variations

Imaginons que nous souhaitions déterminer les variations de la fonction

$$f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x - 14.$$

Cette fonction étant plus compliquée que les polynômes de degré 1 ou 2. Nous allons devoir introduire de nouveau outils.

Comme nous allons le voir la méthodologie générale que nous allons employé est la suivante :

- a partir de la fonction f, on détermine une nouvelle fonction f' ; cette fonction est appelée la *dérivée* de la fonction f et elle mesure les accroissements de f.
- Il faut ensuite déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par exemple, cela peut s'effectuer à l'aide de Δ si f' est un polynôme de degré 2.
- Grâce au signe de la dérivée, nous en déduisons les variations de f grâce au théorème suivant.

Théorème 3 (Variations et dérivées)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*

- *$f'(x)$ est positive si et seulement si f est croissante*
- *$f'(x)$ est négative si et seulement si f est décroissante.*

Voyons comment cela peut se mettre en oeuvre.

Exemple 2.0.1. Si $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x - 14$ alors (ces calculs seront détaillés plus tard)

$$f'(x) = -6x^2 + 30x - 36.$$

Il faut ensuite résoudre $f'(x) = 0$ à l'aide de Δ. Celui-ci vaut $\Delta = (30)^2 - 4 \times (-6) \times (-36) = 36 > 0$. Il y a donc deux solutions

$$x_1 = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = 3.$$

Par suite, nous avons (puisque $a = -6 < 0$)

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
signe de $f'(x)$)		$-$	0	$+$	0	$-$	

En conséquence, la fonction f admet les variations suivantes (il est possible de vérifier ceci à la calculatrice) :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$-\infty$

Grâce à ce tableau, nous savons quelle allure à la courbe associée à la fonction f.

Remarque. L'utilisation de la calculatrice permet d'avoir une intuition concernant les limites de la fonction lorsque $x \to \pm\infty$.

2.1 Dérivation d'une somme

Voyons quelles sont les formules qui vont nous permettre de déterminer f' à partir de f. Il est essentiel de connaitre les dérivées des fonctions usuelles.

Proposition 4. *Le tableau suivant fournit le domaine de définition ainsi que la dérivée de fonctions usuelles.*

Fonction	*Domaine définition*	*Expression*	*Domaine dérivation*	*Dérivée*
constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
identité	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
carré	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
cube	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$

De manière général, si $n \in \mathbb{R}_*$ alors

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Voyons comment utiliser ce formulaire pour dériver des sommes de fonctions.

Proposition 5. *Soient u, v deux fonctions dérivables et $a \in \mathbb{R}$.*

1. $\big(au\big)' = au'$.
2. $\big(u+v\big)' = u' + v'$.

Voyons sur un exemple.

Exemple 2.1.1. Si $f(x) = 4x^6 + 3x^2 - 2x + 1$ alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^3 + 3x^2 + 1)' \\ &= 4(x^3)' + 3(x^2)' - 2(x)' + (1)' \\ &= 4 \times 3x^2 + 3 \times 2x^1 + -2 \times 1 + 0 = 12x^2 + 6x - 2. \end{aligned}$$

2.2 Dérivation d'un quotient

Parfois nous devrons étudier les variations d'un quotient de fonctions dérivables. Voici de quelle manière il est possible de dériver un quotient.

Proposition 6 (Dérivée d'un quotient)**.**
Si v ne s'annule pas,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Remarque.

la dérivée d'un quotient n'est pas le quotient des dérivées !

Exemple 2.2.1. Déterminons les variations de $h(x) = \frac{3x^2-12x+3}{4x+1}$.

1. Déterminons d'abord l'ensemble de définition de h : cela revient à résoudre $4x+1=0$ pour identifier la valeur interdite (celle annulant le dénominateur) afin de l'exclure.

$$4x + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{1}{4}.$$

2. Etudions les variations de h sur $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{4}\}$. Pour cela, observons que

$$h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

avec $u(x) = 3x^2 - 12x + 3$ et $v(x) = 4x + 1$. Par suite,

$$u'(x) = 6x - 12 \quad \text{et} \quad v'(x) = 4.$$

C'est pourquoi nous obtenons

$$h'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(6x-12)\times(4x+1) - (3x^2-12x+3)\times 4}{(4x+1)^2} = \ldots = \frac{12x^2+6x-24}{(4x+1)^2}.$$

3. Il faudrait ensuite déterminer le signe de $h'(x)$. Cela nous fournit le tableau suivant.

x	$-\infty$		-1.68		-0.25		1.18		$+\infty$
signe de $12x^2+6x-24$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(4x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

4. Il ne reste plus qu'à établir les variations de h à partir du signe de $h'(x)$. Attention, il convient de ne pas oublier la double barre en -0.25 pour signaler la présence d'une valeur absolue.