Chapitre 2

Généralités sur les fonctions (1ère partie)

2.1 Introduction

Bien que la définition d'une fonction ait grandement évoluée depuis, son introduction par Leibniz date de la fin du 17ème siècle. Bernoulli et Euler développèrent par la suite ce domaine, notamment en établissant le lien entre l'expression d'une fonction et sa courbe représentative.

De nombreuses questions plus délicates (qui seront abordées en classe de 1ère et de Terminale) occuperont de nombreux mathématiciens (Bolzano, Cauchy, Dirichlet,. . .) au 19ème siècle.

Des ensembles assez complexes de fonctions sont également inventés (Lebesgue, Schwartz,. . .) au 20ème siècle afin de répondre à des problèmes compliqués de natures diverses et variées. En définitive, les concepts liés aux fonctions sont relativement récents à l'échelle de l'histoire des mathématiques.

2.2 Notion de fonction

Considérons un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ (pas nécessairement un intervalle). Définir une fonction sur l'ensemble I revient à fournir une formule précisant les calculs à effectuer à partir d'un nombre $x \in I$. Comme nous le verrons, la calculatrice est un outil très pratique pour étudier des fonctions.

Un peu comme **une recette de cuisine**, il faut **suivre les étapes dans l'ordre** pour arriver au **résultat**. Voici quelques exemples pour illustrer cela.

Exemple 2.2.1.

1. Il est possible de définir la fonction qui à un nombre x lui associe le double de sa valeur. C'est-à-dire $f(x) = 2x$.
2. Il est aussi possible de définir la fonction carrée qui à tout nombre x associe son carré. C'est-à-dire $f(x) = x^2$.

3. Bien entendu, il est possible de regarder des fonctions beaucoup plus compliquées en précisant les opérations que doit subir un nombre réel x pour obtenir la valeur de $f(x)$.

$$f(x) = x^2 - 3x + 12 \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{6x-1}{x+1},\ x \neq -1 \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{3x^2 - (x+2)(x^3 - \pi)}{x^2+1} \ldots$$

   Nous étudierons ce genre de fonctions que plus tard dans l'année.

Voyons maintenant la définition formelle.

Définition 2.2.1. *Une fonction f est définie sur l'ensemble I lorsque à tout point $x \in I$ nous associons un* unique *nombre noté $f(x)$. Nous emploierons fréquemment la notation $f : x \mapsto f(x)$.*

Remarque (Vocabulaire).
1. L'ensemble des réels I pour lesquels il est possible de déterminer $f(x)$ est appelée **l'ensemble de définition** de f.
2. $f(x)$ est appelée **l'image** de x par la fonction f.
3. Si pour un nombre réel donné y, il est possible de trouver un autre réel $x \in I$ tel que $y = f(x)$ nous dirons que x est **l'antécédent** (dans I) de y par f.

Voyons sur quelques exemples.

Exemple 2.2.2.
1. Si $f : x \mapsto 2x$. Pour ce choix de fonction, l'image du point $x = 2$ vaut $f(2) = 2 \times 2 = 4$. Tout nombre réel admet un antécédent par la fonction f. Par exemple, $y = 17$ admet pour antécédent $\frac{17}{2}$ car $f\left(\frac{17}{2}\right) = 2 \times \frac{17}{2} = 17$.
2. Si $f : x \mapsto x^2$. Observons que les nombres négatifs n'admettent pas d'antécédent. En effet, si $y = -1$ il n'est pas possible de trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^2 = -1$ car $x^2 \geq 0$ et $-1 < 0$.

2.3 Représentation graphique

Une manière de visualiser ces fonctions est d'utiliser une représentation graphique. Cela nous permettra, notamment, de résoudre certains problèmes ou certaines équations à partir d'un graphique. Pour cela, il est nécessaire d'introduire la notion de repère et de coordonnées.

2.3.1 Coordonnées dans le plan

Comme nous allons le voir, associer des coordonnées à un point du plan permet de traiter, plus simplement, de manière algébrique des problèmes géométriques. Pour définir des coordonnées, il est important d'introduire un repère.

Définition 2.3.1. *Définir un repère orthonormé du plan consiste à choisir* 3 *points, distincts, non-alignés dans un ordre précis : O, I, J. Le repère est alors noté $(O; I; J)$ et :*

- *le point O est appelé origine du repère ;*
- *la droite (OI) est l'axe des abscisses et le point I donne l'unité sur cet axe ;*
- *la droite (OJ) est l'axe des ordonnées et le point J donne l'unité sur cet axe.*
- *les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et $OI = OJ$.*

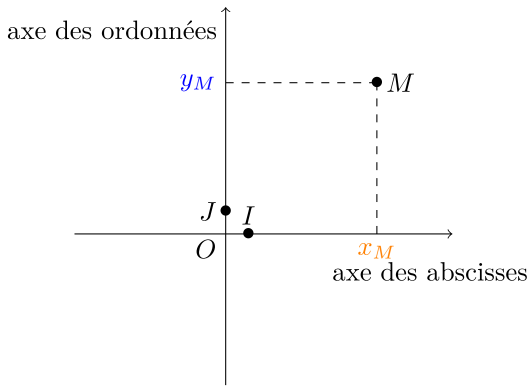
Remarque.

1. Bien que l'axe des abscisses soit souvent placé de manière horizontale, ce n'est pas une obligation.
2. Il est possible de choisir des repères qui ne sont pas normés : cela signifie que $OI \neq OJ$. Cela revient à choisir des échelles différentes pour les deux axes.
3. Il est aussi envisageable de considérer un repère non orthogonale : autrement dit, les droites (OI) et (OJ) ne sont pas forcément perpendiculaires.

Voyons à présent de quelle manière attribuer des coordonnées à un point du plan une fois qu'un repère ait été choisi.

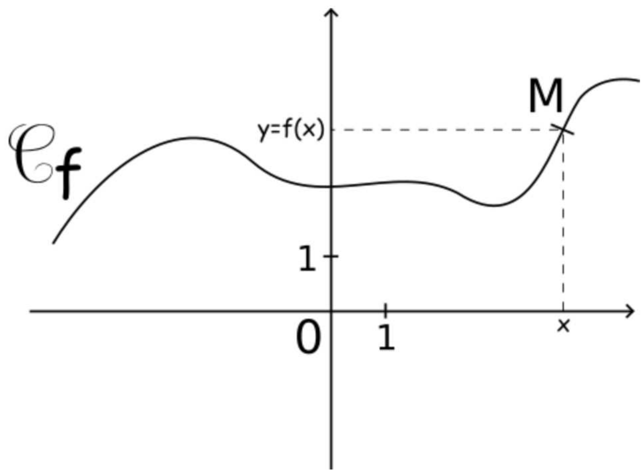
Définition 2.3.2. *Soit $(O; I; J)$ un repère du plan et M un point quelconque.*

- *En traçant la parallèle à (OJ) passant par M, nous obtenons l'abscisse x_M du point M sur l'axe (OI).*
- *En traçant la parallèle à (OI) passant par M, nous obtenons l'ordonnée y_M du point M sur l'axe (OJ).*
- *Le couple de réels (x_M, y_M) est le couple de coordonnées du point M dans le repère $(O; I; J)$.*



2.3.2 Courbe représentative

Définition 2.3.3. *Soient* $(O; I; J)$ *un repère du plan et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction. La courbe représentative* $\mathcal{C}_f$ *de la fonction* f *est l'ensemble des points* M *de coordonnées* $(x; y)$ *avec* $x \in I$ *et* $y = f(x)$.



Remarque. Il est important de savoir utiliser ce graphique pour trouver :

- **l'ensemble de définition** d'une fonction,
- **l'image** (sur l'axe des ordonnées) par f d'un point x.
- **des antécédents** (sur l'axe des abscisses) par la fonction f d'un point y (placé sur l'axe des ordonnées).

Exercices à traiter : 16 et 17 page 216.

Il est également important d'être capable d'utiliser sa calculatrice pour afficher la courbe d'une fonction. **Les manipulations qui suivent doivent donc êtres sues** : en cas de doute, aller voir les **tutoriels d'Y. Monka sur youtube** (https ://www.youtube.com/user/YMONKA/videos).

1. Sur la calculatrice, il suffit d'utiliser la touche $f(x)$ pour entrer la formule $y_1 = f(x)$ définissant la fonction puis d'appuyer sur la touche *graphique* pour obtenir une figure.
2. Attention, il faut parfois ajuster la fenêtre de visualisation pour voir la courbe en entière. Pour cela, il faut cliquer sur la touche $fenêtre$ pour ensuite modifier les abscisses avec $Xmin$ et $Xmax$; ainsi que les ordonnées avec $Ymin$ et $Ymax$.
3. $Xgrad$ et $Ygrad$ permettent de définir la taille des graduations sur les axes des abscisses et des ordonnées.
4. La touche *zoom* peut également être utile pour choisir judicieusement la fenêtre de visualisation du graphique.

5. La touche *table* de la calculatrice permet de déterminer les valeurs prises par $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle d'étude.

Exercices à traiter : 18 et 20 page 216.

2.3.3 Appartenance à une courbe

Il est important de savoir vérifier par le calcul qu'un point $A(x_A; y_A)$ appartient une courbe ou non. De manière générale, une courbe est définie à l'aide d'une fonction par l'équation :

$$y = f(x)$$

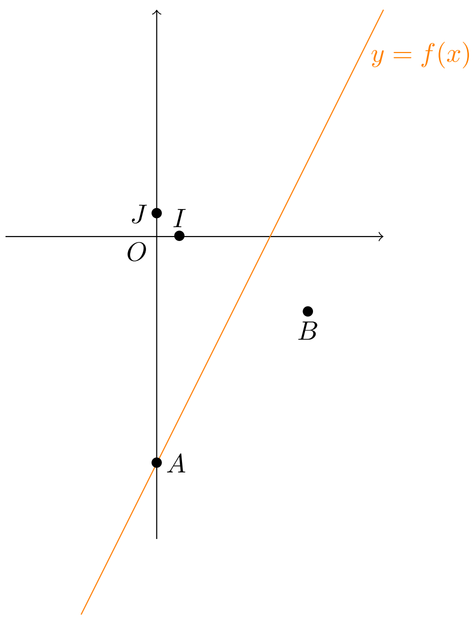
Ceci signifie la chose suivante.

Proposition 7. *Soient C_f une courbe définie par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A(x_A; y_A)$ un point du plan. Les assertions suivantes sont vérifiées*
- $y_A = f(x_A)$ *si et seulement si* $A \in \mathcal{C}_f$.
- $y_A \neq f(x_A)$ *si et seulement si* $A \notin \mathcal{C}_f$.

Remarque. En pratique, pour vérifier qu'un point $A(x_A; y_B)$ se trouve ou non sur une courbe si suffit de comparer $f(x_A)$ avec y_A.

Pour rendre ceci plus concret, voyons sur un exemple.

Exemple 2.3.1. Supposons que $f(x) = 2x - 3$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc obtenue grâce à l'équation $y = 2x - 3$.



1. Le point $A(0; -3) \in \mathcal{C}_f$. En effet, d'une part $y_A = -3$ et, d'autre part, $f(x_a) = f(0) = 2 \times 0 - 3 = -3$. Ainsi, nous avons

$$y_A = f(x_A)$$

le point A est bien sur la courbe.

2. Le point $B(2;-1)$ n'est pas sur la courbe puisque $y_B = -1$ tandis que $f(x_B) = f(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$. Ainsi

$$y_B \neq f(x_B)$$

le point n'est pas sur la courbe.

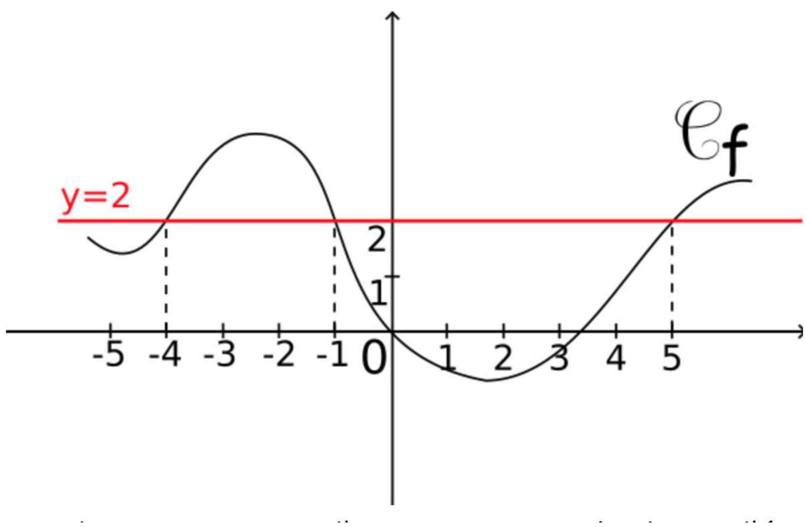
Il est important d'être capable d'effectuer ces vérifications par le calcul.

Exercices à traiter : 21 et 22 page 216.

2.4 Résolution graphique

2.4.1 Résoudre une équation

La représentation graphique d'une fonction f permet d'obtenir une nouvelle méthode pour résoudre des équations de la forme $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Pour cela, il convient de tracer la courbe $y = f(x)$ sur $\mathbb{R}$ ainsi que la droite d'équation $y = k$ afin de déterminer l'ensemble S des éventuels points d'intersections de ces deux courbes.



Remarque. Si jamais la droite $y = k$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ ne se coupe pas, l'ensemble des solutions S est vide et nous noterons ceci par $S = \emptyset$. Notons également qu'une telle méthode **ne vaut pas pour démonstration**, elle permet seulement de guider son intuition et il est primordial d'être capable d'effectuer une **résolution algébrique** (ce que nous verrons dans un chapitre ultérieur).

La calculatrice est de nouveau utile pour résoudre, de manière approximative, ce genre d'équation. Pour cela, il suffit :

1. d'aller dans l'onglet $f(x)$ de la calculatrice pour définir $y_1 = f(x)$ et $y_2 = k$.
2. cliquer sur la touche *graphe*.
3. cliquer ensuite sur le bouton *trace* et sélectionner la valeur *intersection*.

En particulier, les manipulations précédentes permettent de **trouver les antécédents** du point $y = 2$ par la fonction f en déterminant les **abscisses des points d'intersections de la droite rouge avec la courbe $\mathcal{C}_f$.**

Exercices à traiter : 30 et 32 page 217.

2.5 Bilan du chapitre

Voici les compétences à acquérir durant ce chapitre :

- Vérifier qu'un point se trouve sur une courbe.
- Déterminer l'ensemble de définition, l'image d'un point, les éventuels antécédents d'un point, à partir d'une courbe représentative donnée.
- Résoudre graphiquement une équation.