Chapitre 3

Calcul littéral (1ère partie)

3.1 Introduction

Dès l'Antiquité égyptienne ou babylonienne, les scribes disposaient de procédures pour trouver une quantité inconnue soumise à certaines conditions. Par exemple, le Papyrus Rhind (conservé au British Museum de Londres, il date de 1650 av. *J.C.*) comporte l'énoncé suivant :

On doit diviser 100 miches de pain entre dix hommes comprenant un navigateur, un contremaître et un gardien, tous trois recevant double part. Que faut-il donner à chacun ?

Toutefois les méthodes développées et mises en place pour résoudre ce genre de problème n'étaient pas systématiques : chacun utilisait des combinaisons de bouts de recettes pour espérer obtenir la solution du problème.

En 825 le mathématicien arabe Al-Khwarizmi écrit un traité d'algèbre géométrique et introduit le concept d'équation. Il s'agissait d'une égalité entre deux expressions mathématiques comportant dans leurs termes des nombres connus et une quantité inconnue.

Il fallut attendre les travaux de Descartes pour que la quantité inconnue soit désignée par le lettre x. Les mathématiques italiennes du 16ième siècle furent très fécondes quant à la résolution d'équations polynomiales (dans lesquelles x est élevé à une certaine puissance) grâce aux nombreux travaux de Del Fero, Tartaglia, Cardan,... A cet époque, il est prestigieux d'avoir mis au point une méthode permettant de résoudre un grand nombre d'équation.

3.2 Expressions algébriques

3.2.1 Forme factorisée et developpée

Lorsque nous aurons à traiter une expression algébrique, celle-ci pourra se trouver sous forme factorisée (produit ou quotient de facteurs) ou bien sous forme développée (somme de termes). Dans ce chapitre nous allons nous consacrée à la forme développée et reviendrons ultérieurement sur la forme factorisée. Voyons plutôt sur un exemple.

Exemple 3.2.1. La fonction $f(x) = x^2 - 2x - 3$ se trouve sous forme développée, sa forme factorisée est $f(x) = (x+1)(x-3)$.

Remarque.

1. D'une certaine manière, il est possible de retenir qu'une forme **développée ne contient plus de parenthèses et n'implique que des additions et des soustractions** tandis que la forme **factorisée ne fait intervenir des produits de facteurs** (ou, comme nous le verrons plus tard, des quotients).
2. Suivant le problème à résoudre, il faudra être à même de déterminer la forme la mieux adaptée.

3.2.2 Développement

Pour passer d'une forme factorisée à une forme développée, il suffit de développer l'expression en distribuant les termes de chaque facteur pour ensuite effectuer d'éventuelles simplifications. Le procédé inverse, pour factoriser une forme développée, sera traité dans un chapitre ultérieur.

Exemple 3.2.2.

$$\begin{aligned}
(2x+1)(-x+3) - 2(5x+7) &= 2x \times (-x) + 2x \times 3 + 1 \times (-x) + 1 \times 3 + (-2) \times 5x + (-2) \times 7 \\
&= -2x^2 + 6x - x + 3 - 10x - 14 \\
&= -2x^2 - 5x - 11
\end{aligned}$$

Au début des calculs précédents, nous avons donc

1. **distribué** le terme $2x$ dans la deuxième parenthèse. Ceci nous a donné les termes $2x \times (-x) + 2x \times 3$.
2. Puis nous avons procédé de manière similaire en **distribuant** 1 dans la deuxième parenthèse et obtenu $1 \times (-x) + 1 \times 3$.
3. Enfin, nous avons effectué des **calculs semblables pour développer** $-2(5x+7)$.
4. Ensuite nous avons rassembler les objets de même nature ensemble : les x^2 ensembles, les x ensembles et les constantes ensembles. Autrement dit, nous avons **simplifier notre expression algébrique**.

Remarque. **Attention :** Il est évident qu'il n'est pas possible de répondre à la question suivante : *combien font* 2 *poneys plus* 1 *chat ?*. Pour les mêmes raisons n'est pas possible de simplifier l'addition $2x + 1$. En revanche, il est possible d'additionner les poneys entre eux : 5 poneys moins 2 poneys donne un total de 3 poneys. Par analogie, $5x - 2x = 3x$.

Exercices à traiter : 49, 50,51 page 52 (exercices courts) ; 53, 54 (algo) page 52 ; 55 page 44 page 52 à faire à la maison.

Identités remarquables

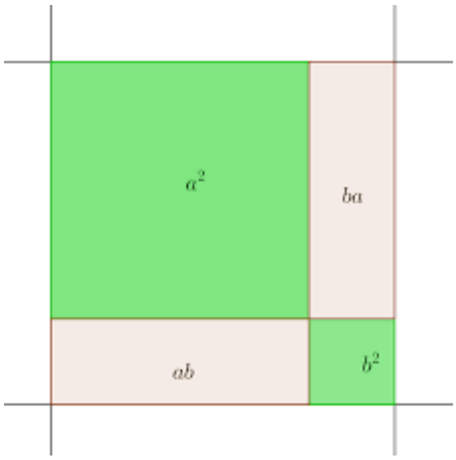
Pour gagner du temps lors de certains développements impliquant un carré, il sera essentiel de **connaître, sur le bout des doigts, les identités remarquables** suivantes.

Proposition 8. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, les identités suivantes sont satisfaites.*

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{et} \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Remarque. Notons que, dans chacune des égalités précédentes, le membre de droite correspond à la forme **développée** tandis que le membre de gauche correspond à la forme **factorisée**.

Les identités remarquables peuvent s'interpréter de manière géométrique. Par exemple, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ signifie que l'aire d'un carré de côté $a+b$ et la même que la somme de l'aire d'un carré de côté a plus celle d'un carré de côté b plus deux fois l'aire d'un rectangle de côté a et b.



Démonstration. Démontrons la première égalité. Pour cela, il suffit d'observer que $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$. Ensuite, il suffit de distribuer les termes de la premières parenthèses dans la deuxième. Nous obtenons donc $a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + 2ab + b^2$ puisque $ab = ba$. Il est aisée de reproduire cette démonstration lorsque nous souhaitons traiter $(a-b)^2$ et le même procédé (de distribution) permet d'obtenir la dernière identité remarquable. □

A titre d'illustration, voici un exemple d'application de telles formules.

Exemple 3.2.3.
1. $(2x+3)^2 = 4x^2+12x+9$, ici nous utilisons l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$.
2. $(2x-1)(2x+1) = 4x^2 - 1$, ici nous utilisons l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 1$.

Exercices à traiter : 62,63 page 52 ; 64 page 52 à faire à la maison.

3.3 Résolution d'équation

Dans ce qui suit, nous allons résoudre de manière algébrique (par opposition à la méthode graphique vue dans un chapitre précédent) des équations de la forme

$$f(x) = k \tag{3.3.1}$$

où f est une fonction donnée et k un nombre réel connu.

Remarque. Comme nous l'avions observé plus tôt, cela revient à déterminer (s'ils existent) les antécédents x de k par la fonction f.

Définition 3.3.1. *Résoudre l'équation* (3.3.1) *dans un ensemble de nombre réels $I \subset \mathbb{R}$ revient à déterminer tout les élements appartenant à I pour lesquels l'égalité* (3.3.1) *est vérifiée.*

Exemple 3.3.1.
1. 2 n'est pas solution de l'équation $x^2-4x+3=0$ car $2^2-4\times2+3=-1\neq0$.
2. 3 est une solution, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $x^2-4x+3=0$ puisque $3^2-4\times3+3=0$.

Remarque. Une équation peut avoir une unique solution, plusieurs solutions ou aucune solution.

Exercices à traiter : 26 page 96.

3.3.1 Résolution algébrique d'équations

Nous allons voir qu'il est possible de résoudre une équation par le calcul. Il est fondamental de comprendre comment traiter une équation de degré un (ceci signifie que l'équation (3.3.1) n'implique que des constantes ainsi qu'une inconnue x sans que celle-ci soit élevée à une quelconque puissance).

Equation de degré un

Pour résoudre une équation de degré un, il faut et il suffit **d'isoler x dans un membre** de l'égalité. Pour cela, il est possible d'utiliser les opérations élémentaires d'addition, de soustraction, de division, de multiplication, sur chacun des membres de l'équation pour arriver à nos fins.

Exemple 3.3.2. Résolvons, dans $\mathbb{R}$, l'équation $3x+3=5x-7$.

$$3x+3=5x-7 \iff 3x-5x+3=5x-5x-7 \iff -2x+3=-7$$

Poursuivons nos calculs

$$-2x+3-3=-7-3 \iff -2x=-10 \iff \frac{-2x}{-2}=\frac{-10}{-2}$$

Pour enfin conclure que $x=\frac{-10}{-2}=5$, nous indiquerons ensuite que l'ensemble des solutions S vaut $S=\{5\}$ signifiant que l'unique solution à l'équation est le nombre réels $x=5$.

Exercices à traiter : résoudre $x-3=0$, $3x+5=0$; $5x-1=x-9$; $8x-3=-5x-4$ à faire à la maison.

Il est important d'être capable de mettre des problèmes en équations pour ensuite chercher à les résoudre. De manière générale, il convient d'utiliser les lettres $x, y, z, \ldots$ pour désigner une quantité inconnue ; ces inconnues sont alors reliées entre elles par des relations données par l'énoncé, lesquelles fournissent à alors les équations à résoudre.

Exercices à traiter : 68 page 99 ; 72 page 99 à faire à la maison (rappel : l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle est donnée par la formule $\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$ où h est une hauteur du triangle et b la base associée).

Comme nous allons le voir (dans un chapitre ultérieur), il est possible d'employer le même type de méthodes pour résoudre des inéquations (équations avec une inégalité au lieu d'une égalité).

3.4 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :

- Développer des expressions polynomiales simples.
- Mettre un problème en équation.
- Résoudre une équation de degré 1 :
- Utiliser les identités remarquables.