Chapitre 3

Nombres complexes, point de vue géométrique

3.1 Introduction

Dans le premier chapitre du cours, nous avons constaté que les nombres complexes apparaissent naturellement lorsque nous souhaitons résoudre des équations polynomiales. En particulier, cet ensemble contient il contient les solutions d'une équation de degré 2 dont le discriminant associé est strictement négatif.

Bien qu'il soit satisfaisant d'avoir résolu ce genre d'équations, il serait dommage de limiter l'utilisation des nombres complexes à cela. En 1806, Jean-Robert Argand publia une interprétation géométrique des nombres complexes : il observa qu'il était possible d'associer à tout nombre complexe $z = a + ib$ un vecteur du plan de coordonnées $(a; b)$ et vice-versa. En outre, nous savons depuis la classe de seconde que l'utilisation des vecteurs est un moyen pratique pour faire de la géométrie (en utilisant la notion de coordonnées et en résolvant des équations). En effet, à chaque fois nous traduisons le problème géométrique qu'il fallait résoudre sous forme vectorielle (la notion de parallélisme devient la notion de colinéarité, celle de perpendicularité s'exprime via la notion d'orthogonalité,. . .) pour ensuite manipuler plus simplement des expressions algébriques permettant de résoudre de manière systématique les problèmes géométriques.

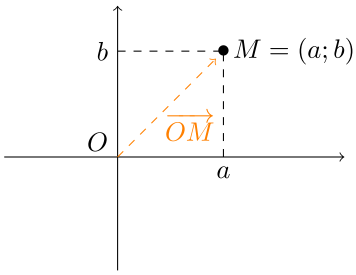
L'observation d'Argand inspira de nombreux mathématiciens (Gauss, Cauchy entre autres) et permit d'exprimer des problèmes géométriques à l'aide de nombres complexes (en passant dans le monde des vecteurs au préalable). Les nombres complexes devinrent un outil très commode pour étudier des transformations du plan (rotations, homothéties,. . .). Pour mettre en oeuvre tout ceci, il est nécessaire d'introduire le vocabulaire adéquat.

Nous vous invitons à consulter la vidéo suivante
https://www.youtube.com/watch?v=7BaaJ0OnONE&list=PLw2BeOjATqrtiLPWvH_VeXmmBRmwcEwLz&index=5
qui illustre de manière pédagogique ce que nous allons découvrir dans ce chapitre.

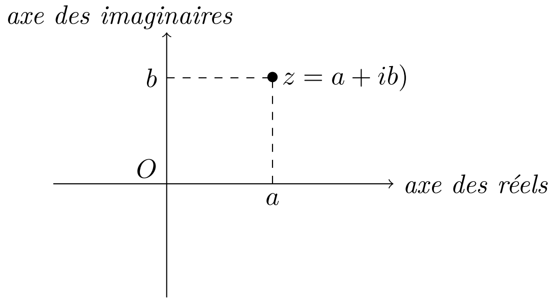
3.2 Représentation géométrique

Définition 3.2.1. *Soit $M(a;b)$ un point du plan. Nous dirons que **l'affixe** du point M est le nombre complexe*

$$z = a + ib.$$



Vecteurs



Nombres complexes

Nous dirons également que z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

A partir de cette observation, pour faire de la géométrie il suffit de traduire un problème vectoriel dans le monde des nombres complexes.

Proposition 10. *Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives z et z'. Les propriétés suivantes sont satisfaites*

1. *$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ si et seulement si $z = z'$.*
2. *L'affixe du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est $z + z'$.*
3. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'affixe de $\lambda\overrightarrow{u}$ est λz.*

Nous savons également depuis la classe de seconde qu'il est possible de construire des vecteurs à partir des coordonnées de deux points voyons ce que devient cette propriété dans le monde des complexes ; de même, à partir des coordonnées des extrémités d'un segment il est possible de déterminer les coordonnées de son milieu, voyons ce que cela signifie en terme d'affixes.

Proposition 11. *Soient A, B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B. Alors*

1. *L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.*
2. *L'affixe I du milieu du segment $[AB]$ est $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.*

Voyons un exemple d'application de tout ceci.

Exemple 3.2.1. Soient A, B, C et D des points d'affixes

$$z_A = -3 - I, \quad z_B = 1 + i, \quad z_C = 3 - 2i, \quad Z_d = -1 - 4i.$$

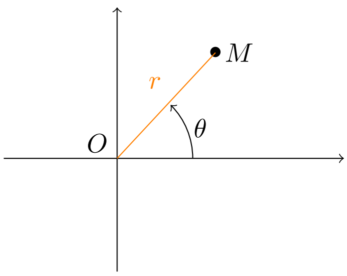
1. Placer ces points dan un repère orthonormée.
2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
3. En déduire l'affixe du point M, centre du parallélogramme $ABCD$.

Exercices à traiter : 25,28 page 66 et 27 (Q1)p66.

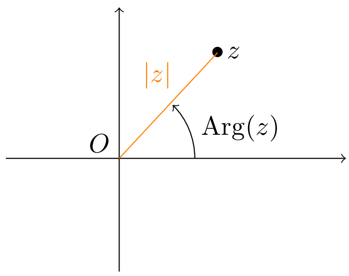
3.3 Module et argument

Dans le plan, il se trouve que l'utilisation des coordonnées cartésiennes n'est pas l'uniquer manière de repérer un point : au lieu d'utiliser l'abscisse et l'ordonnée, il est possible d'utiliser un **angle** $\theta \in [0; 2\pi[$ et une **longueur** $r > 0$ (il s'agit des coordonnées polaires d'un point). Nous allons voir qu'il est possible de traduire cette notion dans le monde des complexes.

Soit $M(a; b)$ un point d'affixe $z = a + ib$.



Vecteurs



Nombres complexes

Avant de définir ces nouvelles quantités, précisons qu'un nombre complexe z est défini de manière unique par $|z|$ et $\text{Arg}(z)$.

3.3.1 Module

Définition 3.3.1. *Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, son* **module** $|z|$ *est défini par*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque.

1. $|z|$ est un **nombre réel positif** et la formule associée est précisément la même que celle employée en seconde pour calculer une **distance entre deux points à partir de leur coordonnées**. C'est pourquoi $|z|$ s'interprète également comme la distance entre O et M.
2. En poursuivant ce raisonnement, nous constatons que $|z_A - z_B|$ correspond **à la distance entre A et B**. Voyons ce que cela permet de représenter. Considérons l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z + 1 - i| = 3$. Ceci peut s'exprimer de la manière suivante

$$|z + 1 - i| = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad |z - (-1 + i)| = 3.$$

Il s'agit donc de l'ensemble des points z se trouvant à une distance de 3 du point I d'affixe $-1 + i$. Il s'agit donc du **cercle de centre I et de rayon** 3. En fait, en utilisant l'écriture algébrique $z = x + iy$, l'équation $|z - (-1 + i)| = 3$ correspond précisément à l'équation cartésienne d'un cercle étudiée en classe de première.

Exemple 3.3.1.

1. Le module de $z = \sqrt{3} + i$ vaut $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$.
2. Le module de $z' = 1 - 2i$ vaut $|z'| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Exercice à traiter : 29p67, 61p69.

Voyons à présent les propriétés vérifiées par le module.

Proposition 12. *Soit $z \in \mathbb{C}$ alors*

1. $|-z| = |z|$
2. $|\bar{z}| = |z|$
3. $z\bar{z} = |z|^2$.

Démonstration. Avant d'entamer les démonstrations, il est important d'adopter le point de vue géométrique des complexe et de constater que les deux premières assertions sont évidentes. Pourtant, il faut être capable de les démontrer. Voyons comment procéder pour le 3ème point, les autres sont laissés à titre d'exercices. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$. Par suite $\bar{z} = a - ib$. Nous avons donc

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

par définition de $|z|$. □

Comment se comporte le module vis-à-vis de certains opérations élémentaires ? Que pourrions-nous dire de $|z \times z'|$? ou $\left|\frac{z}{z'}\right|$?

Proposition 13. *Soient z et z' deux nombres complexes alors*

1. $|zz'| = |z| \times |z'|$. *En particulier,* $|z^n| = |z|^n$ *pour tout* $n \geq 1$.
2. *Si de plus* $z' \neq 0$ *alors*
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$
3. *(inégalité triangulaire)* $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Démonstration. Démontrons que $|zz'| = |z| \times |z'|$; observons au passage qu'il est équivalent de démontrer que $|zz'|^2 = |z|2 \times |z'|^2$. A nouveau, notons $z = a + ib$ et $z' = c + id'$. En conséquence,

$$z \times z' = (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(cb + ad)$$

donc

$$\begin{aligned}|zz'|^2 = (ac - bd)^2 + (cb + ad)^2 &= (ac)^2 - 2acbd + (bd)^2 + (cb)^2 + 2cbad + (ad)^2 \\ &= (ac)^2 + (bd)^2 + (cb)^2 + (ad)^2.\end{aligned}$$

En outre, $|z|^2 = a^2 + b^2$ et $|z'|^2 = c^2 + d^2$. Par suite,

$$|z|^2 \times |z'|^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2.$$

Les deux quantités sont donc égales. □

Exemple 3.3.2. en reprenant les valeurs de l'exemple précédent, calculer le module de

$$z_1 = zz', \quad z_2 = z^2, \quad z_3 = \frac{1}{z'} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{z}{z'}.$$

Exercices à traiter : 30p66, 64p66.

3.3.2 Argument

Définition 3.3.2. $\text{Arg}(z)$ *est appelé* **argument de** z *et correspond à l'angle orienté entre l'axe des abscisses et la demi-droite* $]OM)$.

Remarque. Comme pour la mesure d'un angle orienté, un nombre complexe (non nul) possède une infinité d'arguments. Si $\text{Arg}(z) = \theta$ alors les nombres $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont aussi des arguments de z. La plupart du temps, nous allons travailler modulo 2π.

La connaissance de l'argument d'un nombre complexe z permet d'obtenir facilement des informations sur z.

Proposition 14. *Soit* $z \in \mathbb{C}$.

1. $z \in \mathbb{R} \iff \text{Arg}(z) = 0 \quad ou \quad \pi[2\pi]$.
2. $z \in i\mathbb{R} \iff \text{Arg}(z) = \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Exemple 3.3.3. $\text{Arg}(-2) = \pi[2\pi]$ et $\text{Arg}(4i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Hormis pour des cas triviaux, nous ne savons pas encore comment déterminer l'argument d'un nombre complexe. C'est l'objet de la section suivante.

3.4 Forme trigonométrique

Définition 3.4.1. *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $\text{Arg}(z) = \theta[2\pi]$ *alors*

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

est appelée **forme trigonométrique** *de* z.

Exercices à traiter : 73p70.

Cette nouvelle écriture va nous permettre de déterminer l'argument de z à partir de son module et d'équations trigonométriques. Voyons plutôt.

Exemple 3.4.1. Soit $z = \sqrt{3} + 3i$.

1. Calculons $|z|$

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

L'écriture trigonométrique de z est alors

$$\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \iff \qquad \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + i\frac{3}{2\sqrt{3}} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

En identifiant partie réelle et imaginaire, après simplifications, nous en déduisons que θ est solution de

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \quad \text{et} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

C'est pourquoi $\theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Autrement dit, $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Exercices à traiter : 31,32,33 p67 et 79p71.

Voyons à présent d'autres propriétés vérifiées par l'argument d'un nombre complexe.

Proposition 15. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.*

1. $\mathrm{Arg}(-z) = \mathrm{Arg}(z) + \pi[2\pi]$ *et* $\mathrm{Arg}(\bar{z}) = -\mathrm{Arg}(z)[2\pi]$.
2. $\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')[2\pi]$.
3. *Si $z' \neq 0$ alors*
$$\mathrm{Arg}(\frac{z}{z'}) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z')[2\pi].$$

Remarque. 1. En particulier, $\mathrm{Arg}(z^n) = n\mathrm{Arg}(z)[2\pi]$ pour tout $n \geq 1$.

2. Nous reviendrons plus tard sur l'utilisation de l'argument pour résoudre des problèmes géométriques. Mentionnons tout de même que le calcul d'un argument peut servir à montrer que des points sont alignés, des droites perpendiculaires ou parallèles,...

Voyons deux applications de cela.

Exemple 3.4.2. Soient $z = 1 + i\sqrt{3}$ et $z' = 1 - i$.

1. Déterminer un argument de z et de z'.
2. En déduire un argument de zz'.
3. Déterminer partir de ce qui précède la forme algébrique de zz'. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

ou encore

Exemple 3.4.3. Soit $z = \sqrt{3} + i$.

1. Déterminer un argument de z.
2. En déduire que $z^{2\,022}$ est un nombre réel.

3.5 Forme exponentielle

Visiblement, les propriétés de l'argument sont très utiles. Pourtant il ne semble pas toujours aisé de démontrer de telles choses. Pour s'en convaincre, essayez de montrer que $\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')[2\pi]$.

La raison derrière ceci est que les fonctions trigonométriques ne se comportent pas simplement vis-à-vis de l'addition ou de la soustraction. Rappelons des formules (dites d'addition) qui ont été vues en classe de 1ère :

$$\cos(\theta\pm\theta') = \cos(\theta)\cos(\theta')\mp\sin(\theta)\sin(\theta') \quad \text{et} \quad \sin(\theta\pm\theta') = \sin(\theta)\cos(\theta')\pm\cos(\theta)\sin(\theta') \quad \text{pour tout} \quad \theta, \theta' \in \mathbb{R}.$$

Ces formules permettent d'étudier la fonction $f : \theta \mapsto \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Il est alors possible de montrer que
$$f(\theta + \theta') = f(\theta)f(\theta') \quad \text{et} \quad f'(\theta) = if(\theta).$$

Ce genre de propriétés rappellent fortement la fonction $x \mapsto e^x$ puisque

$$e^{\theta+\theta'} = e^{\theta} \times e^{\theta'} \quad \text{et} \quad (e^{i\theta})' = ie^{i\theta} \quad \text{avec} \quad \theta, \theta' \in \mathbb{R}.$$

Ceci conduit à adopter la notation suivante [1] :

Définition 3.5.1. *1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \textit{\textbf{(formule d'Euler)}}.$$

désigne le nombre complexe z de module 1 dont l'argument vaut θ modulo 2π.

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}_*$, l'identité suivante est vérifiée

$$z = |z|e^{i\theta} \quad \textit{\textbf{(forme exponentielle)}}.$$

Exemple 3.5.1. En utilisant un cercle trigonométrique et la formule d'Euler, déterminer une expression simplifié des nombres complexes

$$e^{i2\pi} \quad ; \quad e^{i\pi} \quad ; \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Bien entendu, il faut être capable de passer de la forme algébrique à la forme exponentielle, de la forme trigonométrique à la forme exponentielle et vice-versa.

Exercices à traiter : 87p72 et 35,36 p67 et 92p72.

Cette nouvelle écriture permet de reformuler certaines propriétés de l'argument vues plus tôt (cf. proposition 15) de manière plus intuitive.

Proposition 16. *Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et considérons z, z' deux complexes de module 1 tels que $\mathrm{Arg}(z) = \theta$ et $\mathrm{Arg}(z') = \theta'$. Alors*

1.

$$e^{\theta} \times e^{\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')[2\pi].$$

2. En particulier, pour tout $n \geq 1$, nous avons

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \textit{\textbf{(formule de Moivre)}}.$$

3.

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Arg}(\frac{z}{z'}) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(z')[2\pi]$$

à condition que $z' \neq 0$.

Remarque. La formule de Moivre s'écrit de manière équivalente

$$\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Cette égalité, écrite sous cette forme trigonométrique, est loin d'être évidente !

Exemple 3.5.2. $e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ou encore $(e^{i\frac{\pi}{4}})^8 = e^{i2\pi} = 1$.

1. En fait, il s'agit d'un résultat démontré par Euler

Exercice à traiter : 96 page 73.

La forme exponentielle donne un nouvelle façon d'exprimer les fonctions cosinus et sinus.

Proposition 17 (Formules d'Euler)**.** *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \textit{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exemple 3.5.3 (Linéarisation d'un cosinus)**.** Les formules d'Euler permettent de simplifier des expressions trigonométriques. Voyons sur un exemple :

$$\begin{aligned}
\cos^2(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(e^{2i\theta} + 2e^{i(\theta-\theta)} + e^{-2i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}\right) + \frac{2}{4} \\
&= \cos(2\theta) + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Autrement dit : $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

Exercice à traiter : 102 (Q2 en remplaçant la puissance 4 par 3) page 73 et 103 (Q1) p73 (facultatif).