

Chapitre 3

Nombres complexes, point de vue géométrique

3.1 Introduction

Dans le premier chapitre du cours, nous avons constaté que les nombres complexes apparaissent naturellement lorsque nous souhaitons résoudre des équations polynomiales. En particulier, cet ensemble contient les solutions d'une équation de degré 2 dont le discriminant associé est strictement négatif.

Bien qu'il soit satisfaisant d'avoir résolu ce genre d'équations, il serait dommage de limiter l'utilisation des nombres complexes à cela. En 1806, Jean-Robert Argand publia une interprétation géométrique des nombres complexes : il observa qu'il était possible d'associer à tout nombre complexe $z = a + ib$ un vecteur du plan de coordonnées $(a; b)$ et vice-versa. En outre, nous savons depuis la classe de seconde que l'utilisation des vecteurs est un moyen pratique pour faire de la géométrie (en utilisant la notion de coordonnées et en résolvant des équations). En effet, à chaque fois nous traduisons le problème géométrique qu'il fallait résoudre sous forme vectorielle (la notion de parallélisme devient la notion de colinéarité, celle de perpendicularité s'exprime via la notion d'orthogonalité, ...) pour ensuite manipuler plus simplement des expressions algébriques permettant de résoudre de manière systématique les problèmes géométriques.

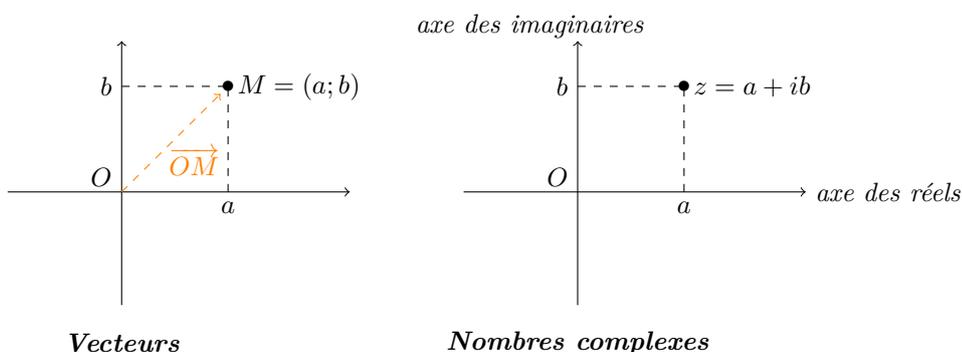
L'observation d'Argand inspira de nombreux mathématiciens (Gauss, Cauchy entre autres) et permit d'exprimer des problèmes géométriques à l'aide de nombres complexes (en passant dans le monde des vecteurs au préalable). Les nombres complexes devinrent un outil très commode pour étudier des transformations du plan (rotations, homothéties, ...). Pour mettre en oeuvre tout ceci, il est nécessaire d'introduire le vocabulaire adéquat.

Nous vous invitons à consulter la vidéo suivante https://www.youtube.com/watch?v=7BaaJ0OnONE&list=PLw2Be0jATqrtiLPwvH_VeXmmBRmwcEwLz&index=5 qui illustre de manière pédagogique ce que nous allons découvrir dans ce chapitre.

3.2 Représentation géométrique

Définition 3.2.1. Soit $M(a; b)$ un point du plan. Nous dirons que l'**affiche** du point M est le nombre complexe

$$z = a + ib.$$



Nous dirons également que z est l'afixe du vecteur \overrightarrow{OM} .

A partir de cette observation, pour faire de la géométrie il suffit de traduire un problème vectoriel dans le monde des nombres complexes.

Proposition 10. Soient \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs du plan d'affixes respectives z et z' . Les propriétés suivantes sont satisfaites

1. $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $z = z'$.
2. L'afixe du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est $z + z'$.
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'afixe de $\lambda \vec{u}$ est λz .

Nous savons également depuis la classe de seconde qu'il est possible de construire des vecteurs à partir des coordonnées de deux points voyons ce que devient cette propriété dans le monde des complexes; de même, à partir des coordonnées des extrémités d'un segment il est possible de déterminer les coordonnées de son milieu, voyons ce que cela signifie en terme d'affixes.

Proposition 11. Soient A, B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B . Alors

1. L'afixe du vecteur \overrightarrow{AB} est $z_B - z_A$.
2. L'afixe I du milieu du segment $[AB]$ est $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

Voyons un exemple d'application de tout ceci.

Exemple 3.2.1. Soient A, B, C et D des points d'affixes

$$z_A = -3 - i, \quad z_B = 1 + i, \quad z_C = 3 - 2i, \quad z_D = -1 - 4i.$$

1. Placer ces points dans un repère orthonormé.
2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
3. En déduire l'afixe du point M , centre du parallélogramme $ABCD$.

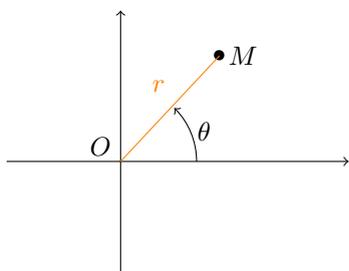
Exercices à traiter : 25,28 page 66 et 27 (Q1)p66.

Nous reviendrons plus en détails sur l'utilisation des nombres complexes en géométrie dans un chapitre ultérieur.

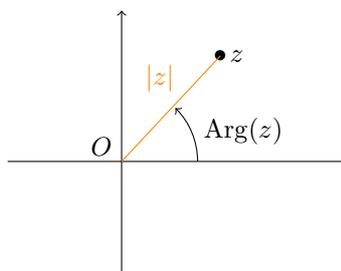
3.3 Module et argument

Dans le plan, il se trouve que l'utilisation des coordonnées cartésiennes n'est pas l'unique manière de repérer un point : au lieu d'utiliser l'abscisse et l'ordonnée, il est possible d'utiliser un **angle** $\theta \in [0; 2\pi[$ et une **longueur** $r > 0$ (il s'agit des coordonnées polaires d'un point). Nous allons voir qu'il est possible de traduire cette notion dans le monde des complexes.

Soit $M(a; b)$ un point d'affixe $z = a + ib$.



Vecteurs



Nombres complexes

Avant de définir ces nouvelles quantités, précisons qu'un nombre complexe z est défini de manière unique par $|z|$ et $\text{Arg}(z)$.

3.3.1 Module

Définition 3.3.1. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, son **module** $|z|$ est défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque. 1. $|z|$ est un **nombre réel positif** et la formule associée est précisément la même que celle employée en seconde pour calculer une **distance entre deux points à partir de leur coordonnées**. C'est pourquoi $|z|$ s'interprète également comme la distance entre O et M .

2. En poursuivant ce raisonnement, nous constatons que $|z_A - z_B|$ correspond **à la distance entre A et B** . Voyons ce que cela permet de représenter. Considérons l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z + 1 - i| = 3$. Ceci peut s'exprimer de la manière suivante

$$|z + 1 - i| = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad |z - (-1 + i)| = 3.$$

Il s'agit donc de l'ensemble des points z se trouvant à une distance de 3 du point I d'affixe $-1 + i$. Il s'agit donc du **cercle de centre I et de rayon 3**. En fait, en utilisant l'écriture algébrique $z = x + iy$, l'équation $|z - (-1 + i)| = 3$ correspond précisément à l'équation cartésienne d'un cercle étudiée en classe de première.

Exemple 3.3.1. 1. Le module de $z = \sqrt{3} + i$ vaut $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$.
 2. Le module de $z' = 1 - 2i$ vaut $|z'| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Exercice à traiter : 29p67, 61p69.

Voyons à présent les propriétés vérifiées par le module.

Proposition 12. Soit $z \in \mathbb{C}$ alors

1. $|-z| = |z|$
2. $|\bar{z}| = |z|$
3. $z\bar{z} = |z|^2$.

Démonstration. Avant d'entamer les démonstrations, il est important d'adopter le point de vue géométrique des complexes et de constater que les deux premières assertions sont évidentes. Pourtant, il faut être capable de les démontrer. Voyons comment procéder pour le 3ème point, les autres sont laissés à titre d'exercices. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$. Par suite $\bar{z} = a - ib$. Nous avons donc

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

par définition de $|z|$. □

Comment se comporte le module vis-à-vis de certaines opérations élémentaires ? Que pourrions-nous dire de $|z \times z'|$? ou $\left| \frac{z}{z'} \right|$?

Proposition 13. Soient z et z' deux nombres complexes alors

1. $|zz'| = |z| \times |z'|$. En particulier, $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \geq 1$.
2. Si de plus $z' \neq 0$ alors

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

3. (inégalité triangulaire) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Démonstration. Démontrons que $|zz'| = |z| \times |z'|$; observons au passage qu'il est équivalent de démontrer que $|zz'|^2 = |z|^2 \times |z'|^2$. A nouveau, notons $z = a + ib$ et $z' = c + id'$. En conséquence,

$$z \times z' = (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(cb + ad)$$

donc

$$\begin{aligned} |zz'|^2 &= (ac - bd)^2 + (cb + ad)^2 = (ac)^2 - 2acbd + (bd)^2 + (cb)^2 + 2cbad + (ad)^2 \\ &= (ac)^2 + (bd)^2 + (cb)^2 + (ad)^2. \end{aligned}$$

En outre, $|z|^2 = a^2 + b^2$ et $|z'|^2 = c^2 + d^2$. Par suite,

$$|z|^2 \times |z'|^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2.$$

Les deux quantités sont donc égales. □

Exemple 3.3.2. en reprenant les valeurs de l'exemple précédent, calculer le module de

$$z_1 = zz', \quad z_2 = z^2, \quad z_3 = \frac{1}{z'} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{z}{z'}.$$

Exercices à traiter : 30p66, 64p66.

3.3.2 Argument

Définition 3.3.2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $\text{Arg}(z)$ est appelé **argument de z** et correspond à l'angle orienté entre l'axe des abscisses et la demi-droite $]OM)$.

Remarque. Comme pour la mesure d'un angle orienté, un nombre complexe (non nul) possède une infinité d'arguments. Si $\text{Arg}(z) = \theta$ alors les nombres $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont aussi des arguments de z . La plupart du temps, nous allons travailler modulo 2π .

La connaissance de l'argument d'un nombre complexe z permet d'obtenir facilement des informations sur z .

Proposition 14. Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

1. $z \in \mathbb{R} \iff \text{Arg}(z) = 0 \text{ ou } \pi[2\pi]$.
2. $z \in i\mathbb{R} \iff \text{Arg}(z) = \pm \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Exemple 3.3.3. $\text{Arg}(-2) = \pi[2\pi]$ et $\text{Arg}(4i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Hormis pour des cas triviaux, nous ne savons pas encore comment déterminer l'argument d'un nombre complexe. C'est l'objet de la section suivante.

3.4 Forme trigonométrique

Définition 3.4.1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $\text{Arg}(z) = \theta[2\pi]$ alors

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

est appelée **forme trigonométrique de z** .

Exercices à traiter : 73p70.

Cette nouvelle écriture va nous permettre de déterminer l'argument de z à partir de son module et d'équations trigonométriques. Voyons plutôt.

Exemple 3.4.1. Soit $z = \sqrt{3} + 3i$.

1. Calculons $|z|$

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

L'écriture trigonométrique de z est alors

$$\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}(\cos \theta + i \sin \theta) \iff \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + i \frac{3}{2\sqrt{3}} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

En identifiant partie réelle et imaginaire, après simplifications, nous en déduisons que θ est solution de

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \text{et} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

C'est pourquoi $\theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Autrement dit, $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Exercices à traiter : 31,32,33 p67 et 79p71.

Voyons à présent d'autres propriétés vérifiées par l'argument d'un nombre complexe.

Proposition 15. Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$.

1. $\text{Arg}(-z) = \text{Arg}(z) + \pi[2\pi]$ et $\text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z)[2\pi]$.
2. $\text{Arg}(zz') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')[2\pi]$.
3. Si $z' \neq 0$ alors

$$\text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z')[2\pi].$$

Remarque. 1. En particulier, $\text{Arg}(z^n) = n\text{Arg}(z)[2\pi]$ pour tout $n \geq 1$.

2. Nous reviendrons plus tard sur l'utilisation de l'argument pour résoudre des problèmes géométriques. Mentionnons tout de même que le calcul d'un argument peut servir à montrer que des points sont alignés, des droites perpendiculaires ou parallèles,...

Voyons deux applications de cela.

Exemple 3.4.2. Soient $z = 1 + i\sqrt{3}$ et $z' = 1 - i$.

1. Déterminer un argument de z et de z' .
2. En déduire un argument de zz' .
3. Déterminer partir de ce qui précède la forme algébrique de zz' . En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

ou encore

Exemple 3.4.3. Soit $z = \sqrt{3} + i$.

1. Déterminer un argument de z .
2. En déduire que z^{2022} est un nombre réel.

3.5 Forme exponentielle

Visiblement, les propriétés de l'argument sont très utiles. Pourtant il ne semble pas toujours aisé de démontrer de telles choses. Pour s'en convaincre, essayez de montrer que $\text{Arg}(zz') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')[2\pi]$.

La raison derrière ceci est que les fonctions trigonométriques ne se comportent pas simplement vis-à-vis de l'addition ou de la soustraction. Rappelons des formules (dites d'addition) qui ont été vues en classe de 1ère :

$\cos(\theta \pm \theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') \mp \sin(\theta)\sin(\theta')$ et $\sin(\theta \pm \theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') \pm \cos(\theta)\sin(\theta')$ pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Ces formules permettent d'étudier la fonction $f : \theta \mapsto \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Il est alors possible de montrer que

$$f(\theta + \theta') = f(\theta)f(\theta') \quad \text{et} \quad f'(\theta) = if(\theta).$$

Ce genre de propriétés rappellent fortement la fonction $x \mapsto e^x$ puisque

$$e^{\theta + \theta'} = e^{\theta} \times e^{\theta'} \quad \text{et} \quad (e^{i\theta})' = ie^{i\theta} \quad \text{avec} \quad \theta, \theta' \in \mathbb{R}.$$

Ceci conduit à adopter la notation suivante¹ :

Définition 3.5.1. 1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad (\text{formule d'Euler}).$$

désigne le nombre complexe z de module 1 dont l'argument vaut θ modulo 2π .

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}_*$, l'identité suivante est vérifiée

$$z = |z|e^{i\theta} \quad (\text{forme exponentielle}).$$

Exemple 3.5.1. En utilisant un cercle trigonométrique et la formule d'Euler, déterminer une expression simplifiée des nombres complexes

$$e^{i2\pi} \quad ; \quad e^{i\pi} \quad ; \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Bien entendu, il faut être capable de passer de la forme algébrique à la forme exponentielle, de la forme trigonométrique à la forme exponentielle et vice-versa.

Exercices à traiter : 87p72 et 35,36 p67 et 92p72.

Cette nouvelle écriture permet de reformuler certaines propriétés de l'argument vues plus tôt (cf. proposition 15) de manière plus intuitive.

Proposition 16. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et considérons z, z' deux complexes de module 1 tels que $\text{Arg}(z) = \theta$ et $\text{Arg}(z') = \theta'$. Alors

1.

$$e^{\theta} \times e^{\theta'} = e^{i(\theta + \theta')} \quad \iff \quad \text{Arg}(zz') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')[2\pi].$$

2. En particulier, pour tout $n \geq 1$, nous avons

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad (\text{formule de Moivre}).$$

3.

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')} \quad \iff \quad \text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z')[2\pi]$$

à condition que $z' \neq 0$.

1. En fait, il s'agit d'un résultat démontré par Euler

Remarque. La formule de Moivre s'écrit de manière équivalente

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Cette égalité, écrite sous cette forme trigonométrique, est loin d'être évidente!

Exemple 3.5.2. $e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ou encore $(e^{i\frac{\pi}{4}})^8 = e^{i2\pi} = 1$.

Exercice à traiter : 96 page 73.

La forme exponentielle donne une nouvelle façon d'exprimer les fonctions cosinus et sinus.

Proposition 17 (Formules d'Euler). *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exemple 3.5.3 (Linéarisation d'un cosinus). Les formules d'Euler permettent de simplifier des expressions trigonométriques. Voyons sur un exemple :

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2i\theta} + 2e^{i(\theta-\theta)} + e^{-2i\theta}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} \right) + \frac{2}{4} \\ &= \cos(2\theta) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Autrement dit : $\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$.

Exercice à traiter : 102 (Q2 en remplaçant la puissance 4 par 3) page 73 et 103 (Q1) p73 (facultatif).

3.6 Applications géométriques

Comme nous l'avons déjà énoncé plus tôt, il est possible de reformuler de nombreux problèmes géométriques en utilisant le langage des nombres complexes. Cette formulation simplifie souvent le problème initial et permet d'utiliser efficacement les nombreuses propriétés de \mathbb{C} .

3.6.1 Utilisation du module

Le **module permet de calculer des distances** : si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B alors

$$AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$$

Cette simple observation est parfois suffisante pour caractériser des ensembles.

Proposition 18. *Soient A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B .*

1. L'ensemble des points M d'affixes z tels que

$$|z - z_A| = |z - z_B|$$

est la médiatrice du segment $[AB]$.

2. Si $r > 0$ alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$|z - z_A| = r$$

est le cercle de centre A et de rayon r .

Exemple 3.6.1. Voyons une première application utilisant le module. Soient A, B et C trois d'affixes respectives $z_A = -1 - 1$, $z_B = 3$ et $z_C = -2 + 3i$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Un simple calcul montre que $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{4+i}{-1+4i} = -i$. Donc

$$\left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1 \iff \frac{AB}{AC} = 1 \iff AB = AC.$$

Le triangle est donc isocèle en A . Des calculs supplémentaires permettraient de vérifier qu'il ne s'agit pas d'un triangle équilatéral.

Remarque. Le lecteur attentif pourrait se demander pourquoi nous avons calculé le quotient $\left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right|$ plutôt que de regarder, les unes après les autres, les distances $|z_B - z_A|$, $|z_C - z_A|$ et $|z_C - z_B|$. Comme nous allons le voir dans quelques instants, la raison derrière ceci est liée à l'utilisation des nombres complexes pour déterminer la mesure d'un angle orienté.

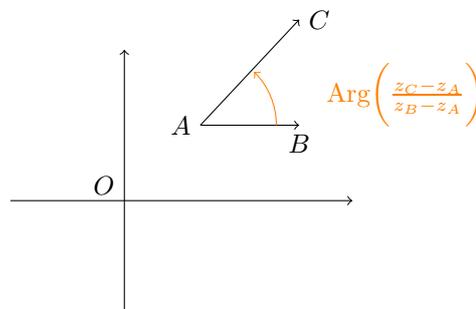
Exercices à traiter : 22,23 page 66 ; 39 page 67 à faire à la maison ; 112,113 page 74 ; 121 page 75 à faire à la maison.

3.6.2 Utilisation de l'argument

Proposition 19. Soient A, B et C trois points distincts du plan, d'affixes z_A, z_B et z_C . Alors, la mesure de l'angle orienté $(\vec{AB}; \vec{AC})$ est donnée par

$$(\vec{AB}; \vec{AC}) = \text{Arg} \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi].$$

Ceci est illustré sur la figure ci-dessous.



Remarque. En fonction de la valeur de l'argument, nous pouvons en déduire des informations sur les points. Par exemple,

- $\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi]$ si et seulement si les points sont alignés.
- $\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Voyons sur un exemple.

Exemple 3.6.2. Reprenons l'étude du triangle ABC dont les sommets ont pour affixes $z_A = -1 - i$, $z_B = 3$ et $z_C = -2 + 3i$. Nous avons montré que $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -i$. Ainsi,

$$\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2}[\pi]$$

le triangle est donc rectangle en A .

Exercices à traiter : 64 page 69 (rappels); 28 page 66; 40 page 67; 118 page 74 à faire à la maison; 139 page 77; 142 page 78 en DM.

3.7 Transformations du plan (pour aller plus loin)

Comme nous allons le voir, de nombreuses transformation du plan peuvent s'écrire sous la forme

$$f(z) = az + b \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{C}^*.$$

Autrement dit, cela signifie qu'à un point du plan M (d'affixe z) nous lui associons un point M' d'affixe z' où

$$z' = az + b. \tag{3.7.1}$$

Ce type de transformation porte le nom de *similitude directe*².

Exemple 3.7.1. Considérons la transformation définie par $z' = e^{i\pi/4}(z - 3) + 3$ et déterminons l'image des points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = 3i \quad ; \quad z_B = 3 \quad ; \quad z_C = 3 + 3i.$$

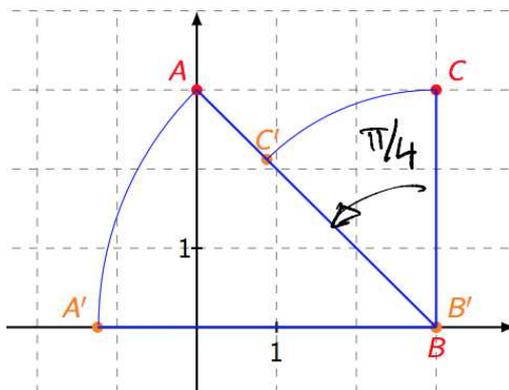
Une figure laisse penser qu'il s'agit d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ centrée en Ω d'affixe $\omega = 3$.

Le début de notre étude va tout d'abord s'intéresser à la question suivante : **existe-t-il des points fixes** pour la transformation f ? Autrement dit, nous cherchons à résoudre l'équation :

$$z = az + b \quad \iff \quad z(1 - a) = b. \tag{3.7.2}$$

Deux cas de figures s'offrent à nous :

2. Les similitudes *indirectes* s'obtiennent en utilisant \bar{z} à la place de z dans (3.7.1), elles permettant notamment d'étudier les réflexions par rapport à une droite et les symétries glissées. Par manque de temps, ces transformations ne seront pas étudiées dans ce cours.



- Lorsque $a = 1$, l'équation (3.7.2) n'admet aucune solution : il n'y a donc **aucun point fixe**. Cela donnera lieu à des translations.
- Lorsque $a \neq 1$, l'équation (3.7.2) admet **une unique solution**

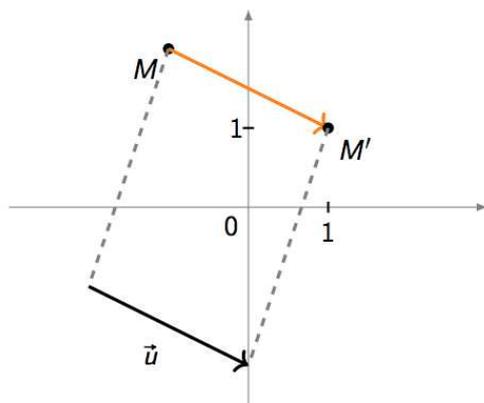
$$\omega = \frac{b}{1-a} \tag{3.7.3}$$

qui correspond au point fixe de la transformation. Ceci donnera lieu à des homothéties, des rotations ou plus généralement des similitudes de centre Ω (d'affixe ω).

Etudions à présent ces différents cas de figures plus en détails.

3.7.1 Translations

Théorème 20 (Translation). Si b est l'affixe d'un vecteur \vec{u} alors la transformation $z' = z + b$ (i.e. $a = 1$) correspond à une translation de vecteur \vec{u} .



3.7.2 Homothéties

Supposons que $a = k > 0$ et $k \neq 1$. Dans ce qui suit, ω sera défini par (3.7.3) et correspondra à l'unique point fixe de la transformation.

Théorème 21 (Homothéties). *L'homothétie de centre Ω (d'affixe ω) et de rapport k est définie par*

$$z' = k(z - \omega) + \omega. \quad (3.7.4)$$

Réciproquement, si $a > 0$ et $a \neq 1$ alors

$$z' = az + b \quad (3.7.5)$$

est l'homothétie de centre Ω et de rapport $k = a$.

Remarque. 1. Si $k > 1$, l'homothétie agrandit les longueurs; si $0 < k < 1$, elle les diminue.

Notons que les points Ω, M et M' sont alignés dans cet ordre. ;

2. Si $z \neq \omega$, il suffit d'observer que (3.7.4) est équivalente à

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = k. \quad (3.7.6)$$

Par suite, en notant M' le point d'affixe z' , M le point z , nous obtenons (en reformulant)

$$\frac{\overrightarrow{\Omega M'}}{\overrightarrow{\Omega M}} = k \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k \times \overrightarrow{\Omega M}.$$

Ainsi, les points Ω, M et M' sont alignés et en utilisant le module nous en déduisons que

$$\Omega M' = k \times \Omega M.$$

ce qui correspond bien à une homothétie de rapport k centrée en Ω . L'ordre des points se détermine simplement en prenant l'argument du quotient (3.7.6).

3. Pour établir que (3.7.4) est équivalente à (3.7.5) il suffit de soustraire les égalités suivantes :

$$z' = az + b \quad \text{et} \quad \omega = a\omega + b.$$

La deuxième équation correspond au fait que ω est un point fixe.

3.7.3 Rotations

Supposons maintenant que $a = e^{i\alpha}$ (i.e. $|a| = 1$) et $a \neq 1$. Dans ce qui suit, ω est de nouveau défini par (3.7.3) et correspond à l'unique point fixe de la transformation.

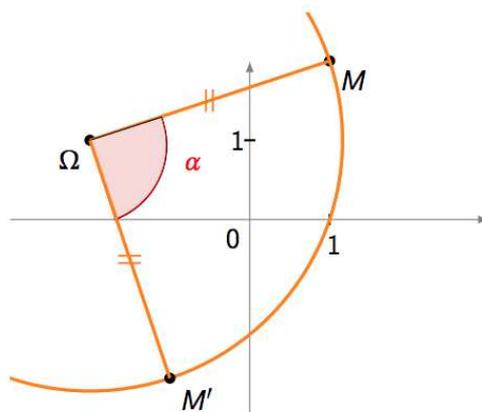
Théorème 22 (Rotations). *La rotation de centre Ω (d'affixe ω) et d'angle θ est définie par*

$$z' = e^{i\alpha}(z - \omega) + \omega.$$

Réciproquement, si $|a| = 1$ et $a \neq 1$ alors

$$z' = az + b.$$

est la rotation de centre Ω et d'angle $\alpha = \text{Arg}(a)[2\pi]$.



Remarque. Si $z \neq \omega$, l'idée est de nouveau considérer le quotient $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$. En effet, ceci mène à

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha}.$$

En particulier, en prenant le modèle ceci fourni

$$\Omega M' = \Omega M \iff M, M' \in \mathcal{C}(\Omega, 1)$$

le cercle de centre Ω de rayon 1. De plus, en utilisant cette fois-ci l'argument, nous en déduisons que

$$(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha[2\pi].$$

Exemple 3.7.2. Considérons la transformation définie par $z' = iz - 2 - 4i$.

1. Cherchons si cette transformation admet un point fixe : résolvons

$$\omega = i\omega - 2 - 4i \iff \omega(1 - i) = -(2 + 4i) \iff \omega = 1 - 3i.$$

2. Observons à présent que

$$\begin{aligned} z' - \omega &= iz - 3 - i \\ &= i(z + 3i - 1) \\ &= i(z - \omega) \\ &= e^{i\alpha}(z - \omega) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de la rotation centrée en Ω d'affixe ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercices à traiter : 16,15 page 84.

3.7.4 Similitudes

Abordons enfin le cas général et supposons que $a \neq 1$ (sans autres restrictions hormis $a \in \mathbb{C}^*$).

Théorème 23. *La similitude de centre Ω , de rapport k et d'angle α est définie par*

$$z' = ke^{i\alpha}(z - \omega) + \omega.$$

Réciproquement, si $a \neq 1$ alors

$$z' = az + b.$$

est la similitude de centre Ω , de rapport $k = |a|$ et d'angle $\alpha = \text{Arg}(a)[2\pi]$.

Remarque. En d'autres termes, une similitude correspond à la composition d'une rotation et d'une homothétie de **même centre**.

Exercices à traiter : 13 page 84.

Exercice 1. Soit s la similitude directe d'écriture complexe :

$$z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

1. Préciser son rapport, son angle et l'affixe de son centre Ω .
2. Montrer que, pour tout point M , distinct de Ω , d'image M' par s , le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M' .

Exercice 2. Dans le plan complexe, considérons les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = -\sqrt{3} - i \quad ; \quad z_B = 1 - i\sqrt{3} \quad ; \quad z_C = \sqrt{3} + i \quad ; \quad z_D = -1 + i\sqrt{3}.$$

1. (a) Donner le module et un argument de chacun de ces quatre complexes.
 (b) Faire une figure et placer ces points.
 (c) Déterminer le milieu du segment $[AC]$ et celui du segment $[BD]$.
 (d) Calculer le quotient $\frac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.
2. On considère la similitude (directe) s dont l'écriture complexe est :

$$z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 2.$$

- (a) Déterminer les éléments caractéristiques de s .
- (b) Déterminer les images respectives des points A', C' et O' par s . Placer ces points sur la figure.
- (c) Que constate-t-on concernant les points A', C' et O' . Démontrez-le.