Chapitre 3

Probabilités conditionelles

3.1 Rappels

Procédons à quelques rappels. Les probabilités est un domaine des mathématiques qui s'évertue à comprendre et étudier des phénomènes aléatoires. Ces phénomènes peuvent être vus comme le résultat d'une expérience dont le résultat est influencé par le hasard (lancer un dé par exemple). Bien qu'il soit impossible de prédire avec certitude le résultat d'une telle expérience, il est envisageable d'énumérer les issues possible.

Définition 3.1.1. *L'univers Ω associé à une expérience aléatoire est composé de toutes les issues pouvant survenir durant cette expérience.*

Exemple 3.1.1. Imaginons que nous lançons un dé à 6 face, le résultat sera toujours aléatoire mais les issues possibles sont les différentes face du dé. Autrement dit, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Une fois l'univers déterminé, le probabiliste souhaite savoir avec quelle probabilité une issue se réalise. Durant votre scolarité au lycée, vous avez principalement rencontré la notion **d'équiprobabilité : chaque issue a autant de chances qu'une autre de se réaliser**. Cette notion est souvent résumée par la formule suivante :

$$\frac{\textbf{nombre de cas favorables}}{\textbf{nombre de cas total}}. \tag{3.1.1}$$

Voyons cela sur des exemples.

Exemple 3.1.2.

1. Reprenons l'exemple du dé et supposons qu'il soit équilibré. Dans ce cas

$$\mathbb{P}(\text{obtenir la face 5}) = \frac{1}{6}$$

car il n'y a qu'une seule face 5 et qu'il y a 6 issues au total.

2. Toujours avec un dé équilibré, quelle est la probabilité de l'évènement A : « obtenir un nombre impair » ? En utilisant la formule (3.1.1), nous trouvons

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

car il y a précisément trois faces impaires (les faces $1, 3$ et 5) sur les 6 issues possibles.

Remarque. L'ensemble A est usuellement désigné sous le nom **d'évènement**.

Parfois nous sommes amené à étudier des évènements plus complexes. Ces derniers peuvent parfois s'exprimer plus simplement grâce aux opérations $\cap$ (« **et** ») ou $\cup$ (« **ou** »). De temps en temps nous rencontrerons aussi la notion **d'évènements complémentaires** ; l'évènement complémentaire de A sera noté A^c ou $\overline{A}$.

Exemple 3.1.3. Imaginons que nous tirons une carte dans un paquet de 32 cartes et que nous nous intéressions à l'évènement C : « obtenir un roi rouge ». Si nous posons

$$A : \text{« obtenir un roi »} \quad \text{et} \quad B : \text{« obtenir une carte rouge »}$$

alors

$$C = A \cap B.$$

Si jamais E désigne l'évènement « obtenir un roi ou une dame » et D désigne l'évènement « obtenir une dame » alors

$$E = A \cup B.$$

Enfin, l'utilisation de la notion de complémentaire permet d'exprimer tout ce qui ne se produit pas dans un évènement donné. Par exemple, l'évènement « obtenir une carte noire » correspond à toutes les issues ne se trouvant pas dans l'évènement B. Autrement dit,

$$\text{« obtenir une carte noire »} = \overline{B}.$$

Pour conclure ces rappels, nous rappelons deux formules utiles.

Proposition 7. *Soient A et B deux évènements alors*

1. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
2. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Nous pouvons à présent débuter notre étude des probabilités conditionnelles.

3.2 Dépendance et indépendance

Parfois certain évènements ont un impact sur d'autres : par exemple, qu'elle est la probabilité que vous preniez un parapluie si la météo annonce de la pluie ? De manière intuitive, le fait de savoir qu'il risque d'y avoir de la pluie va influencer notre décision de prendre un parapluie. Voyons un autre exemple, plus terre à terre.

Exemple 3.2.1. Imaginons que nous lancions un dé équilibré à 6 faces. Sachant que nous avons obtenu un nombre impair, qu'elle est la probabilité d'avoir obtenu le nombre 3. A nouveau, de manière intuitive, il est tentant de répondre : si le résultat obtenu est impair, cela ne laisse que 3 possibilités. Parmi ces possibilités, une seule correspond à la face 3. Autrement dit, la probabilité recherchée vaut $\frac{1}{3}$.

Voyons de quelle manière cela peut se formaliser.

Définition 3.2.1. *Soient deux évènements A et B et supposons que $\mathbb{P}(A) > 0$. Nous appelons probabilité conditionnelle de B sachant A le nombre, noté $\mathbb{P}_A(B)$, défini par*

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Remarque. De manière intuitive, ce nombre correspond à la probabilité que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A s'est déjà réalisé. Lorsque $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, il est parfois utile d'observer que les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$$

Exemple 3.2.2. Imaginons que nous tirons une carte au hasard dans un paquet de 32 cartes ; il est supposé que nous sommes dans une situation d'équiprobabilité : chaque carte a autant de chance qu'une autre d'être obtenue. Nous considérons ensuite les évènements

$$A \,:\, \text{« obtenir une figure »} \quad \text{et} \quad B \,:\, \text{« obtenir un roi »};$$

nous rappelons au passage que l'appellation « figure » désigne l'ensemble des rois, des dames et des valets.

Déterminons la probabilité $\mathbb{P}_A(B)$ d'obtenir un roi sachant que nous avons déjà obtenu une figure. Pour cela, il convient de déterminer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

car il y a 12 figures sur les 32 cartes. En outre, l'évènement $A \cap B$ désigne l'ensemble des rois donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

car il y a 4 rois parmi les 32 cartes. Enfin, nous pouvons en déduire la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}.$$

La probabilité d'obtenir un roi sachant que nous avons obtenu une figure est donc d'une chance sur trois.

Maintenant que nous venons d'introduire la notion de dépendance entre deux évènements, il est naturel de s'interroger quant à la notion d'indépendance. C'est-à-dire, lorsque la réalisation de l'évènement A n'influe pas sur la réalisation de l'évènement B.

Définition 3.2.2. *Deux évènements A et B sont dit indépendants lorsque*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Remarque. D'après la remarque suivant la notion de probabilité conditionnelle, cela signifie que $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ ce qui correspond bien à notre intuition : la connaissance de l'évènement A n'influe pas sur la réalisation de l'évènement B.

Exercices à traiter : exercice 1 et 2 de la feuille associée (rappels sur les probabilités). *Indication : les formules de la proposition 7 seront à utiliser*

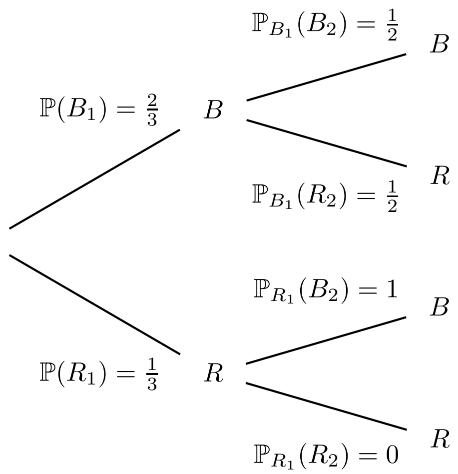
3.3 Représentation graphique

Il est plutôt pratique de représenter les probabilités conditionnelles à l'aide d'arbre pondéré. Voyons plutôt sur l'exemple suivant :

Exemple 3.3.1. Imaginons que nous ayons à disposition une urne contenant 3 boules, dont deux bleues et une rouge. Nous effectuons alors deux tirages successifs, sans remise, et considérons les deux évènements suivants :

B_i : obtenir une boule bleue au ième tirage numéro et R_i : obtenir une boule rouge au ième tirage

avec $i \in \{1, 2\}$. De manière graphique, cette expérience aléatoire (dans laquelle il est supposé que les boules sont indiscernables au touché) se représenterait de la façon suivante :



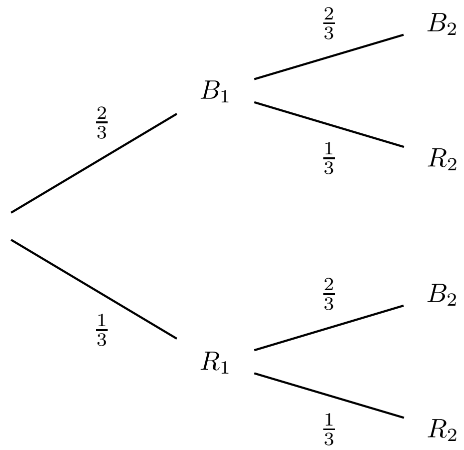
Au premier embranchement, les poids au dessus des branches correspondent à la probabilité des évènements B_1 et R_1. Nous noterons au passage que **la somme de ces poids vaut** 1 (comme à chaque embranchement). A partir du deuxième embranchement, les probabilités sont des probabilités conditionnelles (nous savons que B_1 ou R_1 s'est déjà réalisé).

Il est important de noter que **la probabilité d'un chemin s'obtient en multipliant les poids des branches composant le chemin**. Par exemple, la probabilité d'obtenir une boule blue, puis une une rouge vaut

$$\mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(R_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$$

Il est à noter que $\mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(R_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap R_2)$. Autrement dit, **le produit des poids d'un chemin correspond à la probabilité de l'intersection des évènements apparaissant sur le chemin.**

Bien entendu, si l'expérience se faisait avec remise, nous aurions dresser l'arbre suivant pour lequel les mêmes règles de calculs s'appliquent. D'ailleurs, quitte à agrandir la taille de l'arbre en conséquence, nous aurions pu considérer un plus grand nombre de tirage.



3.4 Partition de l'univers et formules des probabilités totales

Il est souvent utile de décomposer l'univers d'une expérience aléatoire en ensembles disjoints.

Exemple 3.4.1. 1. Lors d'un lancer de dé $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, il est possible de découper Ω en considérant les évènements suivants $A_1 = \{1, 3, 5\}$ (les faces impaires) et $A_2 = \{2, 4, 6\}$ (les faces paires). Peu importe le résultat du dé, nous obtiendrons un résultat qui se trouvera, exclusivement, dans l'un de ses ensembles.

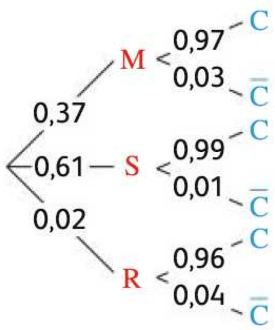
2. Pour diverses raisons, nous aurions pu procéder un autre découpage de l'univers. Par exemple $A_1 = \{1, 5\}$, $A_2 = \{4, 6\}$ et $A_3 = \{2, 3\}$. A nouveau, le résultat obtenu n'appartient qu'à un seul de ces ensembles.

La définition formelle d'une partition est peut-être un peu complexe, il convient plutôt de retenir que les ensembles composant une partition **sont disjoints et que la réunion de tout ces ensembles couvre tout les cas de figures possibles**. L'utilité des partitions apparait facilement lorsque nous souhaitons calculer certaines probabilités. En effet, les partitions permettent de déterminer la probabilité d'un évènement en le décomposant en évènements plus simples. Ce genre de calcul apparait naturellement en utilisant des arbres pondérés.

Exemple 3.4.2. Il existe trois types d'eau qui peuvent être conditionnés : les eaux minérales M, les eaux de source S et les eaux rendues potables par traitements R. Des contrôles sanitaires révèlent que :

- 37% des prélèvements ont été effectués sur des eaux minérales. Parmi eux, 97% étaient conformes.
- 61% des prélèvements ont été effectués sur des eaux de sources. Par eux, 98% étaient conformes.
- parmi les prélèvements d'eaux rendues potables par traitement, 96% étaient conformes.

Nous notons C l'évènement « le prélèvement était conforme ». En utilisant les données de l'énoncé, nous pouvons établir l'arbre pondéré suivant



Nous avons implicitement fait une partition de l'univers en fonction de la provenance de l'eau (minérale, de source ou traitée). Grâce à cela et à la connaissance de probabilités conditionnelles, nous allons pouvoir déterminer la probabilité de C. Pour cela, il suffit d'observer (sur l'arbre) que seuls trois chemins mènent à l'évènement C. Ainsi,

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(M \cap C) + \mathbb{P}(S \cap C) + \mathbb{P}(R \cap C).$$

Il ne reste plus qu'à calculer la probabilité de chacun de ces chemins à l'aide de probabilités conditionnelles :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(C) + \mathbb{P}(S)\mathbb{P}_S(C) + \mathbb{P}(R)\mathbb{P}_R(C) = 0,37 \times 0,97 + 0,61 \times 0,99 + 0,02 \times 0,96 = 0,982.$$

Ce que nous venons d'observer dans l'exemple ci-dessous porte le nom de formule des probabilités totales : il s'agit d'une combinaison de probabilités conditionnelles et d'une partition permettant de calculer la probabilité de certains évènements. Au lieu d'énoncé le résultat dans le cas général, voyons une nouvelle application pour bien saisir le mécanisme mis en jeu.

Exemple 3.4.3. Certaines tablettes de chocolat sont fabriquées à l'aide du cacao A ou du cacao B. Chaque tablette est composé d'un unique cacao. L'emballage de ces tablettes contient un QR code gagnant ou perdant pour un jeu/concours.

Les données suivantes sont connues : 45% des tablettes sont faites avec du cacao A et 60% d'entre elles possèdent un QR code perdant. 20% des tablettes fabriqués avec le cacao B ont un QR code gagnant. Un client achète une tablette au hasard sans regarder sa composition. Par la suite nous utiliserons les notations suivantes :

A : « le cacaco A a été employé » ; G : « le QR code est gagnant ».

1. Faire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que la tablette achetée par le client soit à base de cacao B et que son QR code soit gagnant.
3. Calculer la probabilité que la tablette comporte un QR code gagnant.
4. Si la tablette contient un QR code gagnant, quelle est la probabilité qu'elle soit à base de cacao A ?