Chapitre 3

Suites

3.1 Introduction

Imaginons que nous souhaitons modéliser la situation suivante : supposons que dans un parc, nous étudions une population de hérissons. En 2018, cette population était composée de 100 individus et une estimation affirme que le nombre d'hérissons diminue de 10% chaque année. Des scientifiques estiment que l'espèce sera en danger de disparition lorsque la population du parc sera inférieur à 40. Ceci mène aux questions suivantes :

1. Comment traduire les données précédentes dans un langage mathématique ?
2. Comment déterminer ensuite en quelle année l'espèce sera en danger de disparition ?
3. Pour empêcher l'extinction, les scientifiques décident d'introduire 5 hérissons à la fin de chaque année à partir de 2019. Est-ce que cette mesure va permettre la population d'augmenter ? Quel l'effet cela aura-t-il sur le long terme ?

Pour répondre à ce genre de questions, il est nécessaire d'utiliser le vocabulaire des suites :

- $u_0 = 100$ désigne la population de hérissons dans le parc au début de l'étude (en 2018).
- D'après l'énoncé, $u_1 = (1 - \frac{10}{100})u_0 = 0,9u_0$ correspond à la population l'année suivante (en $2018 + 1 = 2019$).
- De manière générale, si u_n désigne la population de hérissons dans le parc l'année $2018 + n$ alors
$$u_{n+1} = 0,9u_n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$
Autrement dit, pour passer d'une année à l'autre il suffit de multiplier par $q = 0,9$. Nous dirons alors que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison q.
- Puisque $0 < q < 1$, la suite géométrique $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante. Cela signifie que la population diminue d'année en année :
$$u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq u_{n+1} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$
- Puisque $0 < q < 1$ et $u_0 = 100 > 0$, la suite géométrique $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0 :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

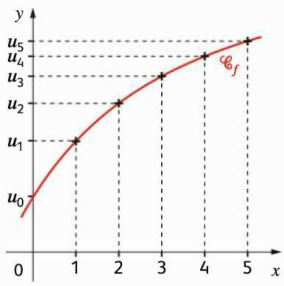
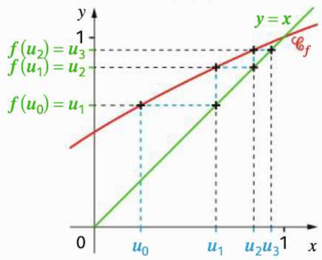
Ainsi, plus nous nous éloignons de l'année 2018, plus la quantité d'hérissons diminue pour se rapprocher de 0.

Nous allons revoir ce genre de notions dans ce chapitre afin de modéliser et étudier différentes situations.

3.2 Généralités sur les suites

Pour construire ou définir une suite, deux approches sont envisageables :

1. l'une s'effectue à l'aide d'une fonction ; ce cas de figure ressemble beaucoup à ce qui se produit lorsqu'on étudie une fonction $x \mapsto f(x)$ sauf qu'au lieu d'avoir $x \in \mathbb{R}$, la variable est un entier naturel $n \in \mathbb{N}$.
2. l'autre repose sur une formule de récurrence qui explique comment déterminer le terme suivant u_{n+1} à partir du précédent u_n et cela pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les termes de la suite sont alors obtenus les uns après les autres, de proche en proche.

<table>
<tr><th>Suite définie explicitement</th><th>Suite définie par récurrence</th></tr>
<tr><td>Pour tout entier naturel n :
$\boldsymbol{u_n = f(n)}$ où f est une fonction définie sur $[0;+\infty[$
Exemple : on considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \frac{3n+2}{n+4} = f(n)$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de $f : x \mapsto \frac{3x+2}{x+4}$ définie sur $]-4;+\infty[$.</td><td>$\boldsymbol{u_0}$ est donné (ou u_p pour $p \geqslant 0$) et, pour tout entier naturel n :
$\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$ où f est une fonction
Exemple : on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}24$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4} = f(u_n)$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de $f : x \mapsto \frac{3x+2}{x+4}$ définie sur $]-4;+\infty[$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Exercices à traiter : 19 et 20 page 50.

3.2.1 Sens de variation

Comme pour les fonctions, il est important de savoir déterminer le sens de variation d'une suite.

Définition 3.2.1. *Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite numérique, une telle suite sera dite :*

- *croissante si, pour tout entier $n \geq 0$*

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

- *décroissante si, pour tout entier $n \geq 0$,*

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

- *constante si, pour tout entier $n \geq 0$,*

$$u_{n+1} = u_n.$$

Remarque. Vocabulaire : une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

En reformulant la définition 3.2.1, nous obtenons des critères pratiques pour étudier la monotonie d'une suite. En effet, l'étude de la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ consiste à **déterminer le signe** de

$$u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

Remarque. Ce taux d'accroissement entre deux termes consécutifs s'apparente à une dérivée discrète.

En effet, observons les faits suivants :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_{n+1} \geq u_n$. Autrement dit u_n est une suite croissante.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_{n+1} \leq u_n$. Autrement dit u_n est une suite décroissante.

Voyons sur un exemple.

Exemple 3.2.1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie (de manière explicite) par

$$u_n = \frac{3n+1}{2n+4} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Calculons quelques valeurs pour conjecturer le sens de variation de la suite.

$$u_0 = \frac{3\times 0+1}{2\times 0+4} = 0,25 \quad ; \quad u_2 = \frac{3\times 2+1}{2\times 3+4} = 0,875 \quad ; \quad u_3 = \frac{3\times 5+1}{2\times 5+4} = 1.$$

Puisque $u_0 \leq u_2 \leq u_3$, il semblerait que la suite soit croissante. Vérifions cela en déterminant le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)+1}{2(n+1)+4} - \frac{3n+1}{2n+4} = \frac{3n+4}{2n+6} - \frac{3n+1}{2n+4} &= \frac{(3n+4)(2n+4)}{(2n+6)(2n+4)} - \frac{(3n+1)(2n+6)}{(2n+4)(2n+6)} \\ &= \frac{10}{(2n+6)(2n+4)} > 0. \end{aligned}$$

En résumé, $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite est croissante.

Exercice à traiter : Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \frac{3}{n+2}$ pour tout $n \geq 0$, faire de même avec la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ définie par $w_n = 3n^2$ pour tout $n \geq 0$; 28 page 51 (facultatif).

Critère de monotonie alternatif

De manière alternative, sous certaines conditions, il est possible d'étudier des quotients. Lorsque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il convient d'étudier si **le rapport**

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

est supérieur ou inférieur à 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela provient de l'observation suivante :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \iff u_{n+1} \geq u_n$. Autrement dit u_n est une suite croissante.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \iff u_{n+1} \leq u_n$. Autrement dit u_n est une suite décroissante.

Remarque.
1. Notons au passage que ces calculs sont visiblement moins complexe que ceux permettant de calculer la dérivée f' d'une fonction dérivable f.
2. Si $u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut modifier la conclusion du critère alternatif en conséquent en échangeant les mots *croissant* par *décroissant* et vice-versa.

Ce critère alternatif est très efficace pour les suites définie par des puissances (les suites géométriques par exemple).

Exemple 3.2.2. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = 2^{3n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Il n'est pas difficile de montrer que $v_n > 0$ pour tout $n \geq 0$ (il s'agit de puissances de 2). Par suite,

$$v_{n+1} = 2^{3(n+1)+1} = 2^{3n+4}$$

donc

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{3n+4}}{2^{3n+1}} = 2^{3n+4-3n-1} = 2^3 = 8 \geq 1.$$

En conséquence, la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

Exercice à traiter : Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \frac{1}{3^n}$.

3.3 Suites arithmétiques et géométriques

Certaines suites apparaissent naturellement pour modéliser certains phénomènes et sont relativement simples à manipuler :

1. lorsqu'on **ajoute toujours la même valeur** r pour passer d'un terme au suivant, il s'agit d'une suite **arithmétique** ;
2. lorsqu'on **multiplie toujours par la même valeur** q pour passer d'un terme au suivant, il s'agit d'une suite **géométrique**.

Les principales propriétés de ce genre de suite sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Remarque. Les suites arithmétiques servent à modéliser des phénomènes **d'évolution linéaires** ; graphiquement, le nuage de points (des termes de la suite) à **l'allure d'une droite**. Quant à elles, les suites géométriques modélisent des phénomènes **d'évolution exponentielles** ; graphiquement le nuage de points (des termes de la suite) ressemble à une **courbe exponentielle**.

	Suite arithmétique (raison r, 1er terme u_0)	**Suite géométrique** (raison q, 1er terme u_0)
Définition (par récurrence)	Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + r$	Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n \times q$
Expression explicite (où $p \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n$)	Pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 + nr$; $u_n = u_p + (n-p)r$	Pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 \times q^n$; $u_n = u_p \times q^{n-p}$
Sens de variation	• Si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante. • Si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante. • Si $r = 0$, (u_n) est constante.	• Si $0 < q < 1$ et si $u_0 > 0$ (resp. $u_0 < 0$), (u_n) est strictement décroissante (resp. strictement croissante). • Si $q = 0$ ou $q = 1$, (u_n) est constante. • Si $q < 0$, (u_n) n'est pas monotone.

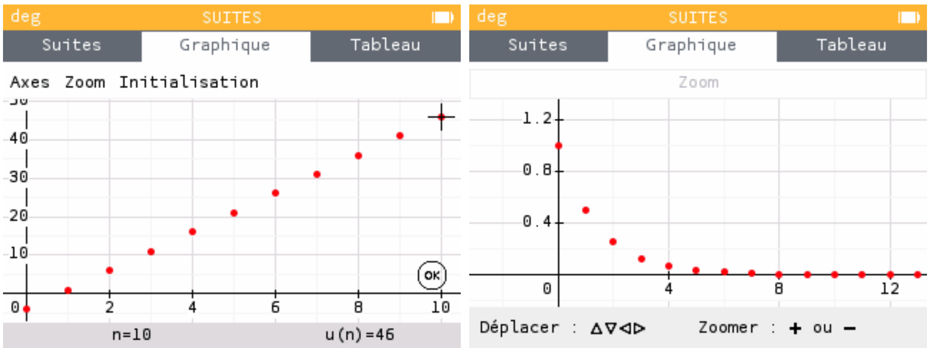


FIGURE 3.1: Représentation graphique d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique

Exercices à traiter : 33, 34 et 35 page 51.

Reprenons l'exemple introductif des hérissons.

Exemple 3.3.1. D'après l'énoncé, la population de hérissons diminue de 10% par an. Ceci mène à la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = (1 - \frac{10}{100})u_n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Il s'agit donc d'une suite géométrique de raison $q = 0,9$; sa formulation explicite est donnée par

$$u_n = u_0 q^n = 100 \times (0,9)^n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $0 < q < 1$ et $u_0 = 100 > 0$ la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante. A l'aide du tableur de la calculatrice, nous trouvons que

$$u_8 > 40 \quad \text{et} \quad u_9 < 40.$$

Les hérissons seront donc en danger de disparition en $2018 + 9 = 2027$.

Exercices à traiter : 46 page 52 et 59 page 53.

3.4 Limite d'une suite

Dans cette section nous nous interrogeons quant au comportement de u_n lorsque n devient de plus en plus grand. Autrement dit, nous nous demandons ce qui se produit lorsque

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = ?$$

Un moment de réflexion suggère que plusieurs cas de figures sont envisageables.

Exemple 3.4.1. 1. Les termes de la suite semblent s'accumuler près d'une valeur : $u_n = \frac{1}{n} + 1$ pour $n \geq 1$.

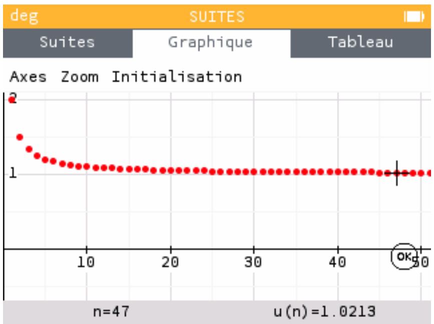


FIGURE 3.2: Graphique associé à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

Il semblerait que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2. Les valeurs semblent devenir de plus en plus grande vers $+\infty$: $v_n = e^{0,2n}$ pour $n \geq 1$ ou $v_n = -n^2$ pour $n \geq 0$.

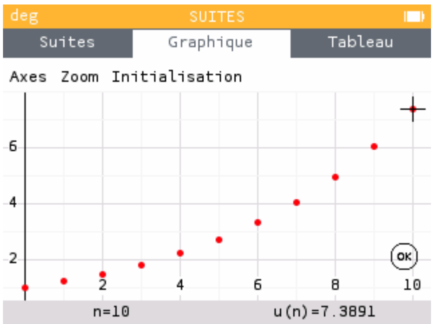


FIGURE 3.3: Graphique associé à la suite $v_n = e^{0,2n}$

Il semblerait que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

3. Les valeurs semblent devenir de plus en plus grande vers $-\infty$: $w_n = -n^2$ pour $n \geq 0$.

Il semblerait que $\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.

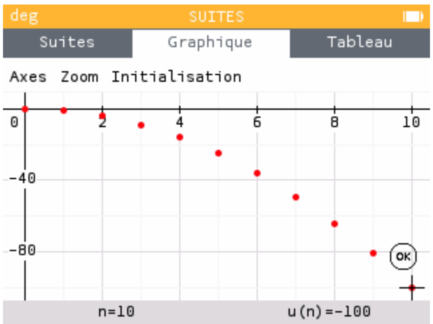


FIGURE 3.4: Graphique associé à la suite $w_n = -n^2$

4. Les points semblent se disperser dans chaque direction : $t_n = (-2)^n$ pour $n \geq 0$.

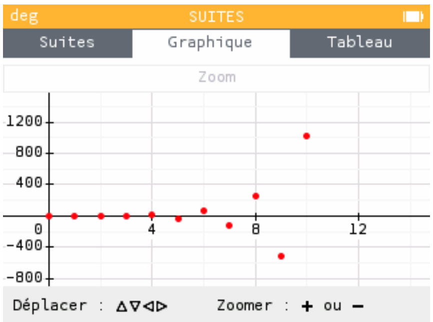


FIGURE 3.5: Graphique associé à la suite $(t_n)_{n\geq 0}$

Il semblerait que la limite $\lim_{n+\infty} t_n$ n'existe pas.

Vocabulaire :

- Lorsque u_n se rapproche d'une valeur $l \in \mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$, nous dirons que u_n **converge vers** l.
- Lorsque u_n se rapproche de $\pm\infty$ lorsque $n \to +\infty$, nous dirons que u_n **diverge**.

En exercice, il sera important (à l'aide la calculatrice) **de conjecturer la valeur de la limite (lorsqu'elle existe) d'une suite**.

Exemple 3.4.2. Reprenons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_n = \frac{3n+1}{2n+4} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Quelques calculs permettent facilement de vérifier que

$$u_n = \frac{3}{2} - \frac{5}{2n+4} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

La fonction tableur de la calculatrice montre ensuite que $\frac{5}{2n+4}$ se rapproche de plus en plus de 0 lorsque $n \to +\infty$. Nous en concluons donc que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{2}.$$

Remarque. Il est possible de faire de nombreuses opérations avec les limites. Ces nombreuses règles sont la plupart du temps du bon sens. Par exemple, si

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = l' \quad \text{alors} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n + v_n = l + l'$$

ou encore

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = l' \quad \text{alors} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n \times v_n = l \times l'.$$

Bien entendu, il est possible de faire de même avec des soustractions ou des quotients. De la même manière, si $l \in \mathbb{R}$, nous avons aussi

$$l \pm \infty = \pm\infty \quad ; \quad l \times \infty = \text{signe}(l)\infty \quad ; \quad \pm\infty \times \infty = \pm\infty.$$

Mise en garde : dans le deuxième point , il est supposé que $l \neq 0$ (cf. forme indéterminée plus bas). Toutes ces règles sont présentées en détails page 42 du livre.

Voyons sur deux exemples.

Exemple 3.4.3. 1. La suite $u_n = \frac{3}{4n-5}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ car

$$\lim_{n+\infty} 3 = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} 4n - 5 = +\infty.$$

2. La suite $v_n = 2n + n^2$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$ car

$$\lim_{n+\infty} 2n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty.$$

Exercices à traiter : 40,41,42 page 51.

Formes indéterminées

Tout ceci se passe pour le mieux concernant les opérations sur les limites. Il faut cependant être prudent car il existe **quatre exceptions** pour lesquelles il n'est pas possible de conclure directement sans travail supplémentaire : il s'agit des limites de la forme

$$\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}$$

qui sont dites alors **indéterminées**. Ce problème est dû au fait que certaines suites tendent plus vite vers 0 ou l'infini que d'autres ; cette notion vitesse fait qu'une limite peut alors l'emporter sur l'autre. Par exemple,

$$\lim_{n+\infty} \frac{n^3+1}{n+1} = +\infty$$

car l'infini du numérateur est « plus grand » que celui du dénominateur. Au contraire, nous pourrions avoir

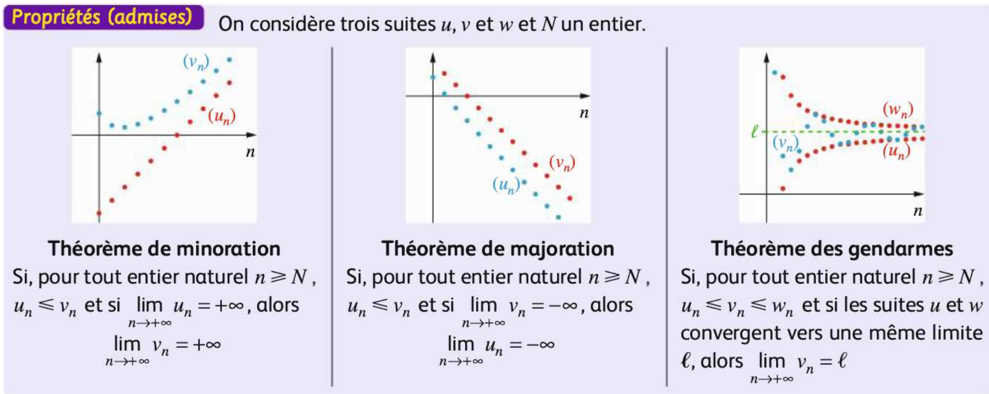
$$\lim_{n+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^2+1} = 0$$

car cette fois-ci l'infini du numérateur est « plus petit » que celui du dénominateur.

Exercice à traiter : 58 page 53 et 76,77 page 56.

Théorèmes de comparaison

Il n'est pas toujours simple, même pour la calculatrice, de déterminer le comportement d'une suite lorsque $n \to +\infty$. Cependant, il est parfois possible de comparer une suite compliquée à une autre plus simple. Dans ce cas, le comportement de l'une à l'infini peut avoir un impact sur le comportement de l'autre.



Voyons sur un exemple.

Exemple 3.4.4. Déterminons la limite de la suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Puisque $(-1)^n$ ne prend que deux valeurs : 1 et -1 nous avons

$$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Exercices à traiter : 84,85 page 57.

3.4.1 Limite d'une suite géométrique

Il est beaucoup plus simple de déterminer la limite d'une suite géométrique à partir de sa raison. Tout repose sur le résultat suivant.

Proposition 14. *Soit $q > 0$ alors*

- *si* $0 < q < 1$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- *si* $q > 1$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Mettons ceci en oeuvre sur plusieurs exemples.

Exemple 3.4.5.
1. Reprenons la suite modélisant l'évolution d'une population d'hérissons. La forme explicite de $(u_n)_{n\geq 0}$ est
$$u_n = 100 \times (0,9)^n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$
Puisque $100 > 0$ et $q = 0,9 \in]0;1[$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Autrement dit, au bout d'un certain temps, la population d'hérissons va s'éteindre.
2. Soit $v_n = -3 \times 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $-3 < 0$ et $q = 2 > 1$ nous avons
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty.$$
3. Supposons qu'une suite $(t_n)_{n\geq 0}$ vérifie
$$0 \leq t_n \leq 0,4 \times (0,7)^n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$
Puisque (pour les mêmes raisons que dans le premier exemple) $\lim_{n\to+\infty} 0,4 \times (0,7)^n = 0$, le théorème des gendarmes nous assure alors que $\lim_{n\to+\infty} t_n = 0$.

Exercices à traiter : 56, 57, 60 page 53.

Somme partielle d'une suite géométrique

Parfois, nous serons amener à additionner les n premiers termes d'une suite géométrique. Il est alors intéressant de connaitre ce qui se produit lorsque $n \to +\infty$. A ce sujet nous avons le résultat suivant.

Propriété Pour tout nombre réel $q \neq 1$ et tout entier naturel n, on a :

Somme des termes de la suite de terme général q^n	Somme des termes de la suite de terme général $u_n = u_0 \times q^n$
$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ $= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$	$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \ldots + u_n$ $= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Si $0 < q < 1$, $\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$ Si $q > 1$, $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$	Si $0 < q < 1$, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q}$ Si $q > 1$, si $u_0 > 0$ $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ si $u_0 < 0$ $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$

Exercices à traiter : 61 page 54.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 3.4.6. Imaginons que nous ayons à disposition une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que u_n représente la quantité d'énergie produite par un panneau photovoltaïque durant l'année $2018+n$. Supposons que $(u_n)_{n\geq 0}$ soit une suite géométrique de raison $q=0,97$ et de premier terme $u_0=1900\,kWh/m^2$ (ce qui correspond à l'énergie produite en 2018 après l'installation).

Nous posons alors la question suivante : en conservant cette installation très longtemps, est-il possible que le particulier puisse espérer produire plus de $70\,MWh$ à compter du 1er janvier 2018 ?

Pour répondre à cette question, nous constatons que nous devons additionner les quantités d'énergie produite depuis 2018. C'est-à-dire, nous devons calculer

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par exemple, d'après ce qui précède, la quantité d'énergie produite durant les 25 premières années correspond à

$$S_{24} = u_0 \times \frac{1-q^{24+1}}{1-q} = 1900 \times \frac{1-0,97^{25}}{1-0,97} \approx 33\,758\,kWh.$$

Puisque $0<q<1$ nous savons également que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = u_0 \times \frac{1}{1-q} = 1900 \times \frac{1}{1-0,97} \approx 63\,333\,kWh.$$

En conclusion, ce particulier ne pourra jamais produire plus de $70\,MWh$ à compter du 1er janvier 2018.

Exercices à traiter : 65 et 66 page 54 ; 67 page 54 (facultatif) *(dans la question 2a de l'exercice, on cherche α solution de l'équation $x=1,05x-10$.*