

Chapitre 4

Généralités sur les fonctions (2ème partie)

Nous revenons sur l'étude des courbes associées à une fonction. Cette fois-ci, nous allons voir comment résoudre graphiquement des inéquations.

4.1 Résolution d'inéquations de la forme $f(x) > k$

Dans cette section, nous chercherons à résoudre graphiquement des inéquations de la forme $f(x) > k$ ou $f(x) < k$ pour une fonction f donnée et un réel k prescrit.

Pour résoudre ce genre de problème, il est important de placer sur le graphique la droite horizontale \mathcal{D} d'équation $y = k$; rappelons au passage que les points d'intersection de cette droite avec la courbe \mathcal{C}_f sont solutions de l'équation $f(x) = k$.

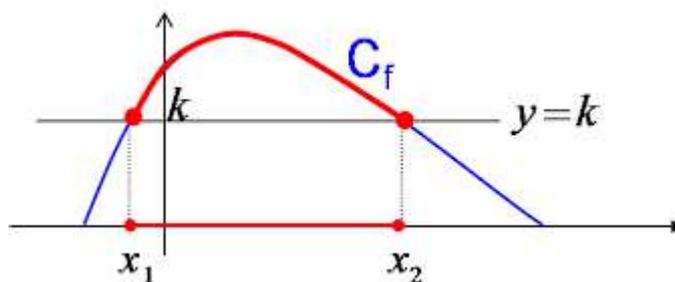
Proposition 9. *Les solutions de l'inéquation $f(x) > k$ sont les abscisses des points de la courbes \mathcal{C}_f situés au-dessus de la droite \mathcal{D} .*

Remarque. 1. Autrement dit, après avoir identifier la partie de la courbe se situant au dessous de la droite \mathcal{D} , il ne reste plus qu'à déterminer les antécédents de ces points sur l'axe des abscisses afin d'obtenir un intervalle ou une réunion d'intervalles.

2. La méthode de résolution pour une inéquation de la forme $f(x) < k$ s'effectue de la même manière en considérant les points de la courbe situés en dessous de la droite \mathcal{D} .

Exemple 4.1.1. Dans le graphique ci-dessous, nous cherchons à résoudre l'inéquation $f(x) > k$. Dans un premier temps, il faut déterminer quelle partie de la courbe se trouve strictement au dessus de la droite $y = k$ pour ensuite déterminer l'intervalle correspondant $]x_1; x_2[$ lequel est colorié en rouge. Note : les points x_1 et x_2 sont les abscisses des points d'intersections entre \mathcal{C}_f et $y = k$, en particulier $f(x_1) = k$ et $f(x_2) = k$; ces derniers sont exclus de l'intervalle solution car ils ne vérifient donc pas l'inéquation $f(x) > k$.

Exercices à traiter : 31 et 34 page 217. Facultatif : 33 page 217.



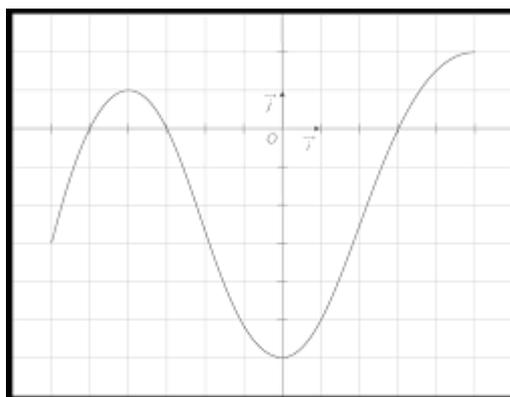
4.2 Etude de signe

Le cas particulier $k = 0$ est primordial car il permet de déterminer le signe de la fonction f (à quel moment $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$).

Exemple 4.2.1. Il est possible de résumer, de manière pratique, les informations concernant le signe de la fonction f à l'aide d'un tableau de la forme suivante :

x	$-\infty$		-5		-3		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ceci signifiant que $f(x) > 0$ lorsque $x \in]-5; -3[\cup]3; +\infty[$, $f(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{-5; -3; 3\}$ et $f(x) < 0$ lorsque $x \in]-\infty; -5[\cup]-3; 3[$. Ce qui correspond bien à ce que nous pouvons observer sur le graphique ci-dessous.



Exercice à traiter : en utilisant les courbes de l'exercice 36 page 218, déterminer le signe des fonctions f et g .

4.3 Position relative de deux courbes

Nous allons généraliser les résultats précédents en résolvant, de manière graphique, des équations de la forme $g(x) = f(x)$ (ce genre de résolution peut s'effectuer à l'aide de la calculatrice) pour des fonctions f et g données. De manière similaire, nous étudierons des inéquations de la forme $g(x) > f(x)$ ou $f(x) < g(x)$.

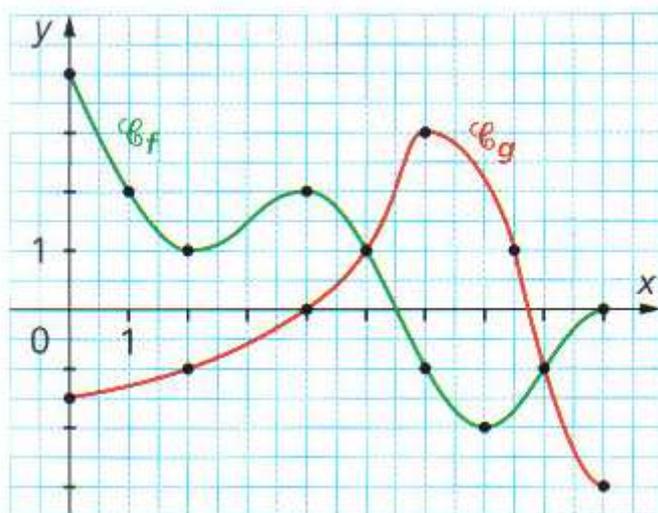
Proposition 10. 1. Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g .

2. Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés au-dessus de la courbe C_g .

3. Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés en-dessous de la courbe C_g .

Remarque. En particulier, si C_g est une droite horizontale d'équation $y = k$ nous retrouvons l'étude faite à la section précédente.

Exemple 4.3.1. La résolution graphique de $f(x) > g(x)$ revient à déterminer à quel moment C_f se trouve au dessus de C_g . Ici, cela correspond à l'intervalle $[0; 5[\cup]8; 9]$.



Il n'est pas difficile de montrer que :

$$f(x) = g(x) \iff x = 5 \text{ ou } x = 8.$$

et

$$f(x) < g(x) \iff x \in]5; 8[.$$

Exercices à traiter : 36,37 et 38 page 218.

4.4 Exercices pour s'entraîner

- Courbe représentative (ensemble définition, image, antécédents) : exercice 13, 16, 17p216, exercice 18p216 (avec la calculatrice)
- Vérifier qu'un point se trouve sur une courbe ou utiliser l'équation de la courbe : exercices 21, 22p216
- Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation : exercices 32, 33p217, 38p218.
- parité d'une fonction (en DM) : exercice 48p219 et 54p219.
- Utiliser sa calculatrice (afficher une courbe, modifier la fenêtre d'affichage, utiliser la table d'une fonction).

4.5 Bilan du chapitre

Voici les compétences à acquérir durant ce chapitre :

- Résoudre graphiquement une inéquation.
- Dresser un tableau de signe à partir d'un graphique.
- Etudier la position relative de deux courbes à partir de leurs graphes.