# Chapitre 5

# Logarithme Néperien

## 5.1 Introduction

Certains éléments chimiques (carbon 14, césium 137, uranium 235, ...) possèdent un noyau instable. Cela signifie qu'il y a un déséquilibre entre le nombre de protons, de neutrons et d'électrons. Pour résoudre ce problème de stabilité, l'élément chimique va chercher à se transformer pour retrouver une situation d'équilibre : ce phénomène porte le nom de *radioactivité*. Différents types de radioactivités existent $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, grossièrement le noyau se trouve avec un surplus de nucléons ou d'électrons et va chercher à s'en débarrasser. De fait, cela implique que le **nombre de noyau** $N(t)$ d'un échantillon de matière radioactive **diminue** au cours du temps. Mathématiquement, $N(t)$ est donné par la formule

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0$$

avec $N_0$ le nombre initial de noyaux de $\lambda > 0$ la constante de radioactivité associée à l'élément étudié. Supposons qu'il y ait $N_0 = 1\,000$ au début de l'expérience, combien de temps faut-il à l'échantillon radioactif pour n'avoir plus que $\frac{N_0}{2} = 500$ noyaux ? Répondre à cette question revient à résoudre l'équation suivante :

$$N(t) = \frac{N_0}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}.$$

Nous devons donc trouver un moyen de se **débarrasser de l'exponentielle** pour trouver la valeur de $t$ solution de l'équation précédente. Pour cela nous allons étudier une nouvelle fonction appelée ***logarithme népérien***.

## 5.2 Définition et propriétés algébriques

**Définition 5.2.1.** *La fonction logarithme $x \mapsto \ln x$ est définie sur $]0;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il s'agit de l'unique fonction continue vérifiant*

$$\ln\left(e^x\right) = x \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad e^{\ln x} = x \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}_+^*.$$

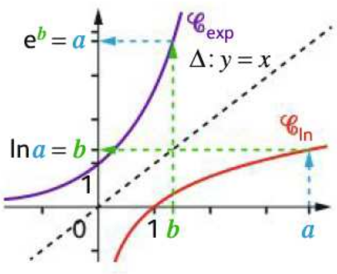


FIGURE 5.1: l'exponentielle et le logarithme népérien sont des fonctions réciproques

*Remarque.* Voyons à présent quelques conséquences de cette définition. Il est important d'avoir en tête que **la fonction logarithme permet de « défaire » ce qu'à fait la fonction exponentielle** (un peu comme $x \mapsto \sqrt{x}$ avec $x \mapsto x^2$). Ses propriétés sont alors réciproques de celles de la fonction exponentielle. Par exemple, $x \mapsto e^x$ allait de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$ tandis que la fonction $x \mapsto \ln x$ fait le contraire.

1. Puisque $e^0 = 1$ nous en déduisons que $\ln(1) = 0$.
2. Contrairement à l'exponentielle, la **fonction logarithme n'est pas de signe constant !**

**Exemple 5.2.1.** Nous pouvons à présent résoudre des équations impliquant l'exponentielle en toute généralité.

1. $2e^x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^x = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \ln\left(e^x\right) = \ln\frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln\frac{1}{2}.$
2. $4\ln x + 16 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln x = -4 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\ln x} = e^{-4} \quad \Longleftrightarrow \quad x = e^{-4}.$

Il est également possible de résoudre des équations impliquant $x \mapsto \ln x$ grâce à la fonction exponentielle.

$$2\ln x - 12 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln x = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad x = e^6.$$

*Remarque.* En particulier, le temps de demi-vie en radioactivité (dont nous avons parlé dans l'introduction), noté $t_{1/2}$, est donné par

$$t_{1/2} = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-\lambda}.$$

**Exercices à traiter :** 38 page 111 et 66 page 72.

Vous avez déjà constaté l'année passée que l'exponentielle vérifiait un grand nombre de propriétés algébriques, puisque $x \mapsto \ln x$ est la fonction réciproque de $x \mapsto e^x$, elle va vérifier des propriétés similaires (lues en « sens inverse »).

## 5.3 Propriétés algébriques

**Proposition 15.** *La fonction logarithme vérifie les propriétés suivantes :*

- *Pour tout* $x, y \in ]0, +\infty[$,
$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$
*En particulier, pour tout* $x \in ]0, +\infty[$ *et* $y \in \mathbb{R}$, *nous avons*
$$\ln(x^y) = y \ln(x).$$
- *Pour tout* $x, y \in ]0, +\infty[$,
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y.$$

*Remarque.* La fonction logarithme transforme donc **les multiplications en additions** et **les divisions en soustractions**.

Voyons sur quelques exemples.

**Exemple 5.3.1.**

1. $\ln(4e) = \ln(4) + \ln(e) = \ln(4) + 1$.
2. $\ln \frac{1}{2} + \ln 2 = \ln \frac{1}{2} \times 2 = \ln 1 = 0$.
3. $\ln(2^3) = 3 \ln 2$.
4. $\ln(\frac{1}{e^2}) = \ln(1) - \ln e^2 = 0 - 2 = -2$.
5. $\ln(10) - \ln(5) = \ln \frac{10}{5} = \ln 2$.

**Exerices à traiter :** 37 et 35 page 111 et 104 page 117.

## 5.4 Variations et dérivées

Tout comme pour l'exponentielle, il parait important de connaitre les variations de la fonction $x \mapsto \ln x$ et de savoir dériver cette nouvelle fonction.

**Proposition 16.** *La fonction* $x \mapsto \ln x$ *est dérivable sur* $]0; +\infty[$ *et*

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \textit{pour tout} \quad x > 0.$$

*En particulier,* $x \mapsto \ln x$ *est strictement croissante et nous avons le tableau de variation suivant*

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

*Remarque.* La monotonie de $x \mapsto \ln x$ nous assure que

$$\ln x \leq \ln y \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq y \quad \text{pour tout} \quad x, y > 0.$$

C'est pourquoi, puisque $\ln(1) = 0$ nous avons

$$\ln x \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 1 \quad \text{et} \quad \ln x < 0 \Longleftrightarrow x \in ]0, 1[.$$

Ceci permet de résoudre de nombreuses inéquations.

**Exemple 5.4.1.**

1. Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $-3e^x + 6 < 0$, nous avons

$$-3e^x + 6 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^x > 2 \quad \Longleftrightarrow \ln(e^x) > \ln(2) \quad \Longleftrightarrow x > \ln 2.$$

   **Le sens de l'inégalité est conservée** lorsque nous appliquons $x \mapsto \ln x$ car il s'agit d'une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Résolvons $3 - 2\ln x \geq 0$ sur $]0; +\infty[$, nous avons

$$3 - 2\ln x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3}{2} \geq \ln x \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\frac{3}{2}} \geq e^{\ln x} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\frac{3}{2}} \geq x.$$

*Remarque.* Dans la résolution, il est important de faire attention au domaine de définition de $x \mapsto \ln x$ : **nécessairement**, $x > 0$.

**Exercices à traiter :** 70,71, 76 et 78 page 114.

Lorsque nous étudierons des fonctions impliquant la fonction $x \mapsto \ln x$, nous aurons besoin de la formule de dérivation suivante.

**Proposition 17.** *Si $x \mapsto u(x)$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $x \mapsto \ln u(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*

$$\big(\ln u(x)\big)' = \frac{u'(x)}{u(x)} \tag{5.4.1}$$

En guise d'entrainement, traitons un exemple.

**Exemple 5.4.2.** Etudions la fonction $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Posons $u(x) = x^2 + 1$. Puisque $\Delta = -4 < 0$ alors $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (puisque $u(x)$ est du signe de $a = 1 > 0$). La fonction $f$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminons $f'$. Pour cela, nous observons que

$$u(x) = x^2 + 1 \quad \text{et} \quad u'(x) = 2x.$$

Par suite, grâce à (5.4.1), nous savons que

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Pour étudier le signe de $f'(x)$, il suffit d'observer que celui-ci est déterminer par le signe du numérateur. Autrement dit,

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

*Remarque.* Les limites au bord du domaine de définition sont établies à l'aide la calculatrice. L'étude aurait pu se poursuivre en déterminant l'équation d'une tangente $T$ à $C_f$ en un point donné pour ensuite étudier la position relative de $C_f$ par rapport à $T$.

**Exercices à traiter :** 88 page 115 ; 97 et 98 page 117.