Chapitre 6

Logarithme Néperien

6.1 Introduction

Certains éléments chimiques (carbon 14, césium 137, uranium 235, ...) possèdent un noyau instable. Cela signifie qu'il y a un déséquilibre entre le nombre de protons, de neutrons et d'électrons. Pour résoudre ce problème de stabilité, l'élément chimique va chercher à se transformer pour retrouver une situation d'équilibre : ce phénomène porte le nom de *radioactivité*. Différents types de radioactivités existent $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, grossièrement le noyau se trouve avec un surplus de nucléons ou d'électrons et va chercher à s'en débarrasser. De fait, cela implique que le **nombre de noyau** $N(t)$ d'un échantillon de matière radioactive **diminue** au cours du temps. Mathématiquement, $N(t)$ est donné par la formule

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0$$

avec N_0 le nombre initial de noyaux de $\lambda > 0$ la constante de radioactivité associée à l'élément étudié. Supposons qu'il y ait $N_0 = 1\,000$ au début de l'expérience, combien de temps faut-il à l'échantillon radioactif pour n'avoir plus que $\frac{N_0}{2} = 500$ noyaux ? Répondre à cette question revient à résoudre l'équation suivante :

$$N(t) = \frac{N_0}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}.$$

Nous devons donc trouver un moyen de se **débarrasser de l'exponentielle** pour trouver la valeur de t solution de l'équation précédente. Pour cela nous allons étudier une nouvelle fonction appelée ***logarithme népérien***.

6.2 Définition et propriétés algébriques

Définition 6.2.1. *La fonction logarithme $x \mapsto \ln x$ est définie sur $]0;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il s'agit de l'unique fonction continue vérifiant*

$$\ln\left(e^x\right) = x \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad e^{\ln x} = x \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}_+^*.$$

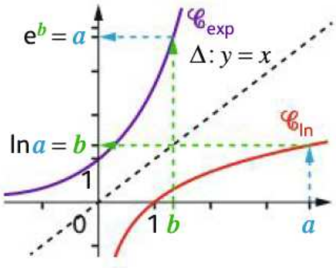

Figure 6.1: l'exponentielle et le logarithme népérien sont des fonctions réciproques

Remarque. Voyons à présent quelques conséquences de cette définition. Il est important d'avoir en tête que **la fonction logarithme permet de « défaire » ce qu'à fait la fonction exponentielle** (un peu comme $x \mapsto \sqrt{x}$ avec $x \mapsto x^2$). Ses propriétés sont alors réciproques de celles de la fonction exponentielle. Par exemple, $x \mapsto e^x$ allait de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$ tandis que la fonction $x \mapsto \ln x$ fait le contraire.

1. Puisque $e^0 = 1$ nous en déduisons que $\ln(1) = 0$.
2. Contrairement à l'exponentielle, la **fonction logarithme n'est pas de signe constant !**

Exemple 6.2.1. Nous pouvons à présent résoudre des équations impliquant l'exponentielle en toute généralité.

1. $2e^x - 1 = 0 \iff e^x = \frac{1}{2} \iff \ln\left(e^x\right) = \ln\frac{1}{2} \iff x = \ln\frac{1}{2}$.
2. $4\ln x + 16 = 0 \iff \ln x = -4 \iff e^{\ln x} = e^{-4} \iff x = e^{-4}$.

Il est également possible de résoudre des équations impliquant $x \mapsto \ln x$ grâce à la fonction exponentielle.

$$2\ln x - 12 = 0 \iff \ln x = 6 \iff x = e^6.$$

Exercices à traiter : 1 à 3 de la feuille associée.

Vous avez déjà constaté l'année passée que l'exponentielle vérifiait un grand nombre de propriétés algébriques, puisque $x \mapsto \ln x$ est la fonction réciproque de $x \mapsto e^x$, elle va vérifier des propriétés similaires (lues en « sens inverse »).

6.3 Propriétés algébriques

Proposition 14. *La fonction logarithme vérifie les propriétés suivantes :*

- *Pour tout* $x, y \in]0, +\infty[$,
$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$
En particulier, pour tout $x \in]0, +\infty[$ *et* $y \in \mathbb{R}$, *nous avons*
$$\ln(x^y) = y \ln(x).$$
- *Pour tout* $x, y \in]0, +\infty[$,
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y.$$

Remarque. La fonction logarithme transforme donc **les multiplications en additions** et **les divisions en soustractions**.

Voyons sur quelques exemples.

Exemple 6.3.1.
1. $\ln(4e) = \ln(4) + \ln(e) = \ln(4) + 1.$
2. $\ln \frac{1}{2} + \ln 2 = \ln \frac{1}{2} \times 2 = \ln 1 = 0.$
3. $\ln(2^3) = 3 \ln 2.$
4. $\ln(\frac{1}{e^2}) = \ln(1) - \ln e^2 = 0 - 2 = -2.$
5. $\ln(10) - \ln(5) = \ln \frac{10}{5} = \ln 2.$

Exerices à traiter : 4 à 6 de la feuille associée.

6.4 Variations et dérivées

Tout comme pour l'exponentielle, il parait important de connaitre les variations de la fonction $x \mapsto \ln x$ et de savoir dériver cette nouvelle fonction.

Proposition 15. *La fonction* $x \mapsto \ln x$ *est dérivable sur* $]0; +\infty[$ *et*
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \textit{pour tout} \quad x > 0.$$
En particulier, $x \mapsto \ln x$ *est strictement croissante et nous avons le tableau de variation suivant*

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Remarque. La monotonie de $x \mapsto \ln x$ nous assure que

$$\ln x \leq \ln y \quad \iff \quad x \leq y \quad \text{pour tout} \quad x, y > 0.$$

C'est pourquoi, puisque $\ln(1) = 0$ nous avons

$$\ln x \geq 0 \iff x \geq 1 \quad \text{et} \quad \ln x < 0 \iff x \in]0, 1[.$$

Ceci permet de résoudre de nombreuses inéquations.

Exemple 6.4.1.

1. Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $-3e^x + 6 < 0$, nous avons

$$-3e^x + 6 < 0 \quad \iff \quad e^x > 2 \quad \iff \ln(e^x) > \ln(2) \quad \iff x > \ln 2.$$

   Le sens de l'inégalité est conservée lorsque nous appliquons $x \mapsto \ln x$ car il s'agit d'une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Résolvons $3 - 2\ln x \geq 0$ sur $]0; +\infty[$, nous avons

$$3 - 2\ln x \geq 0 \quad \iff \quad \frac{3}{2} \geq \ln x \quad \iff \quad e^{\frac{3}{2}} \geq e^{\ln x} \quad \iff \quad e^{\frac{3}{2}} \geq x.$$

Remarque. Dans la résolution, il est important de faire attention au domaine de définition de $x \mapsto \ln x$: **nécessairement**, $x > 0$.

Exercices à traiter : 7 et 8 de la feuille associée.

En guise d'entrainement, traitons un exemple d'étude de fonction.

Exemple 6.4.2. Etudions la fonction $f(x) = 3\ln(x) - 2x + 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminons f'. Pour cela, nous observons que

$$f'(x) = \frac{3}{x} - 2 = \frac{3 - 2x}{x} \quad \text{pour tout} \quad x > 0.$$

2. Pour connaitre le signe de $f'(x)$, il suffit d'observer qu'il est déterminé par celui du numérateur. Or

$$3 - 2x \geq 0 \quad \iff \quad 3 \geq 2x \quad \iff \quad \frac{3}{2} \geq x.$$

   Autrement dit,

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-3\ln\frac{3}{2} - 2$	$\searrow$	$-\infty$

Remarque. Les limites au bord du domaine de définition sont établies à l'aide la calculatrice.

Exercices à traiter : 9 à 11 de la feuille associée.

L'étude de fonctions impliquant la fonction $x \mapsto \ln x$ nécessite parfois la formule de dérivation, que nous donner à toutes fins utiles, suivante.

Proposition 16. *Si $x \mapsto u(x)$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $x \mapsto \ln u(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*

$$\big(\ln u(x)\big)' = \frac{u'(x)}{u(x)} \tag{6.4.1}$$

Exemple 6.4.3. Dérivons la fonction $f(x) = \ln(x^2+1)$ avec $x \in \mathbb{R}$. A cet effet, posons $u(x) = x^2+1$ et observons que

$$u'(x) = 2x.$$

Par suite, en appliquant la formule (6.4.1), nous trouvons que

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$