Chapitre 6

Variables aléatoires discrètes

Dans ce chapitre nous allons étudier deux exemples de loi de probabilités : la **loi uniforme** sur un ensemble discret et la **loi binomiale**. Nous verrons également quels types de situations ces lois modélisent. Avant toutes choses, procédons à quelques rappels.

Définition 6.0.1. *Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.* ***Définir une variable aléatoire*** *X sur Ω revient à* ***associer à chaque issue*** *de Ω un* ***nombre*** *$p \in [0; 1]$.*

Remarque. Une variable aléatoire est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ dont l'issue est aléatoire.

Dans ce chapitre, nous supposons que l'expérience aléatoire sous-jacente ne possède qu'un nombre fini d'issues $x_1, \ldots, x_k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, déterminer la loi de X revient à déterminer une famille de nombre $p_1, \ldots, p_k$ tels que

- $p_i \in [0; 1]$ pour tout $i = 1, \ldots, k$.
- $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$.
- pour tout $i = 1, \ldots, k$, p_i correspond à la probabilité que l'issue x_i se réalise. Autrement dit,

$$\mathbb{P}(X = x_1) = p_1, \quad \mathbb{P}(X = x_2) = p_2, \quad \ldots \quad \mathbb{P}(X = x_k) = p_k.$$

Nous retrouverons également certains paramètres associés à une variable aléatoire : **l'espérance, la variance et l'écart-type.**

Voyons tout cela au travers d'un exemple.

Exemple 6.0.1. Considérons l'expérience aléatoire suivante.

Un joueur mise 2 euros puis lance deux dés trétraédiques parfaits. Il lit le résultat obtenu sur chacun des dés (un entier compris entre 1 et 4). S'il obtient un « double », le joueur récupère sa mise et reçoit une somme, en euros, égale au total des points marqués ; sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise.

Nous nous intéressons au gain (algébrique) du joueur que nous noterons X (les valeurs prises par la fonction X sont aléatoires, il s'agit bien d'une variable aléatoire).

Décrivons plus en détails, l'expérience aléatoire mise en jeu :

- l'univers de cet expérience est un couple d'entier $(x; y)$ avec $1 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y \leq 4$. Les dés étant parfaits, les issues obtenues sont équiprobables et se réalisent avec une probabilité de $\frac{1}{16}$.
- Pour définir la variable X il est important de décrire les valeurs qu'elle va prendre à partir des différentes issues de l'expérience aléatoire. Ceci peut s'effectuer à l'aide d'un tableau à double entrée : la première ligne désigne le résultat du premier dé, tandis que la première colonne correspond à la valeur affichée par le deuxième dé. C'est-à-dire, a chaque issue nous associons un gain : $(1, 1) \mapsto 2$, $(1, 2) \mapsto -2$,. . . afin de définir la variable aléatoire X.

	1	2	3	4
1	2	−2	−2	−2
2	−2	4	−2	−2
3	−2	−2	6	−2
4	−2	−2	−2	8

En résumé $X \in \{-2; 2; 4; 6; 8\}$. Pourtant cette description de X n'est pas encore satisfaisante. Voyons comment nous pouvons compléter ceci en déterminant la loi de X.

Une fois qu'une variable aléatoire est définie, il est intéressant de déterminer avec quelle probabilité les différentes valeurs sont prises. Par exemple, quelle est la probabilité de l'évènement « gagner 2 euros » ? Autrement dit, quelle est la probabilité de l'évènement $X = 2$?

En utilisant le tableau de la section précédente, nous observons que cet évènement est uniquement réalisé pour l'issue $(1; 1)$. Donc, puisqu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité,

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{16}.$$

De manière similaire, l'évènement $X = -2$ est composé de 12 issues (tous les couples $(x; y)$ avec $x \neq y$), cela assure donc que

$$\mathbb{P}(X = -2) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Il est alors utile de résumé ceci dans un tableau.

Gain x_i	-2	2	4	6	8
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Ce tableau représente la loi de probabilité de X.

6.1 Loi uniforme

La loi uniforme intervient dans les situations d'équiprobabilité (toutes les issues ont la même probabilité de se réaliser).

Exemple 6.1.1. Imaginons que nous ayons à disposition un dé équilibré à 6 faces et que X est la variable aléatoire indiquant la face obtenue après un lancer. Autrement dit, si $X = 2$ signifie que le joueur a obtenu le nombre 2 après avoir jeter le dé. Puisque nous somme dans une situation d'équiprobabilité, la loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \ldots = \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{6}.$$

Il se peut que les issues ne soit pas numérotées aussi simplement que dans l'exemple précédent.

Exemple 6.1.2. Dans une urne, 20 boules indiscernables au toucher sont numérotées de 10 à 29. Nous notons X la variable aléatoire qui indique le numéro de la boule obtenue après un tirage. Nous sommes toujours dans une situation d'équiprobabilité et la loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = 10) = \frac{1}{20}, \quad \mathbb{P}(X = 11) = \frac{1}{20}, \quad \ldots \quad \mathbb{P}(X = 29) = \frac{1}{20}.$$

De manière formelle, voici la définition.

Définition 6.1.1. *Soient $a < b$ deux entiers naturels. X suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{a, a+1, a+2, \ldots, b\}$ si*

$$\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = a+1) = \ldots = \mathbb{P}(X = b) = \frac{1}{b - a + 1}.$$

De plus, $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$.

Remarque. Puisque la loi uniforme est associée à une situation d'équiprobabilité, il suffit de savoir combien d'issues différentes contient l'ensemble $\{a, \ldots, b\}$. Un moment de réflexion suffit à se convaincre qu'il y en a $b - a + 1$.

Exemple 6.1.3. Reprenons l'exemple de l'urne, pour tout $k \in \{10, \ldots, 29\}$, nous avons bien

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{29 - 10 + 1} = \frac{1}{20}.$$

De plus, $\mathbb{E}[X] = \frac{10+29}{2} = 19,5$.

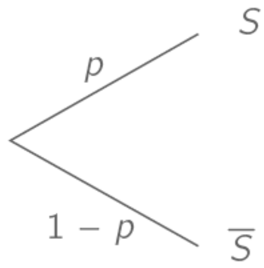
Exercices à traiter : 1page 201 (Q1 et Q2 seulement) ; 31 page 211.

6.2 Loi de Bernoulli

Dans cette section, nous considérons une expérience très simple puisqu'elle ne comporte que deux issues.

6.2.1 Epreuve de Bernoulli

Définition 6.2.1. *Soit $p \in [0, 1]$, une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire comportant **deux issues** : un **succès** S de probabilité p et un **échec** $\bar{S}$ de probabilité $1 - p$.*



Remarque. De manière schématique, cela peut se représenter par un arbre pondéré :

où S désigne l'issue appelée « succès ».

Voyons quelques exemples d'épreuves de Bernoulli.

Exemple 6.2.1.
1. Le Jeu de pile ou face (avec une pièce équilibrée) est une épreuve de Bernoulli car elle ne présente que deux issues. Si on désigne le succès S par le fait d'obtenir pile alors $\mathbb{P}(S) = p = \frac{1}{2}$.
2. Un sac contient 10 boules, indiscernables au touché, numérotées de 1 à 10. L'expérience aléatoire consiste à tirer une boule du sac. Le joueur gagne si le numéro est inférieur ou égale à 3. Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle le succès est « obtenir un numéro inférieur à 3 »de probabilité $p = \frac{3}{10}$; l'échec est l'évènement « obtenir un numéro strictement supérieur à 3 »sa probabilité vaut $1 - 0,3 = 0,7$.
3. De nombreux exemples sont envisageables : jouer au loto (on gagne le gros lot ou non), conduire une voiture (avoir un accident ou non),. . .

Remarquons enfin que la notion de succès n'est pas forcément celle que l'on utiliserait en français.

Exemple 6.2.2. Supposons qu'un industriel fabrique des ampoules. Pour chaque ampoule, il effectue l'épreuve de Bernoulli suivante : ou bien l'ampoule a un défaut ou bien elle n'en a pas. Il semble naturel que l'industriel cherche à identifier les ampoules défectueuses. C'est donc normal de définir le succès comme étant l'évènement « l'ampoule a un défaut ».

A une épreuve de Bernoulli, il est toujours possible d'associer une variable aléatoire.

Définition 6.2.2. *Considérons une épreuve de Bernoulli de paramètre p (la probabilité du succès), la variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec est appelée* ***variable aléatoire de Bernoulli****. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :*

Valeur x_i	0	1
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$1 - p$	p

Exemple 6.2.3. Soit l'épreuve de Bernoulli qui consiste à lancer un dé tétraédique et dont le succès est S : « obtenir la face 3 ». Puisqu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité

$$p = \mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(\text{obtenir la face 3}) = \frac{1}{4}.$$

Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès, 0 sinon. Nous avons donc

$$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(\text{obtenir la face 3})=\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(\overline{S})=\frac{3}{4}.$$

X est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p=\frac{1}{4}$.

Proposition 18. *Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$ alors*
- $\mathbb{E}[X]=p$.
- $\mathrm{Var}(X)=p(1-p)$.
- $\sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$.

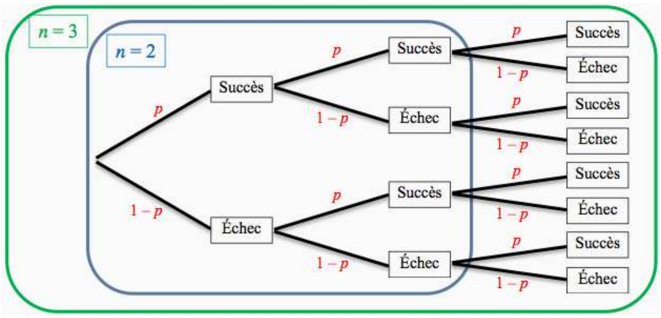
Exercices à traiter :35,36,38 page 212.

6.3 Schéma de Bernoulli

Reprenons l'exemple de l'industriel qui cherche à identifier les ampoules présentant un défaut. Après avoir effectué son test pour la première ampoule, il parait naturel qu'il recommence à nouveau pour les autres ampoules afin de passer son stock en revu. Ce procédé porte le nom de schéma de Bernoulli.

Définition 6.3.1. *Considérons une épreuve de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(S)=p \in [0;1]$. Un schéma de Bernoulli est la répétition de cette épreuve de Bernoulli de façon* ***indépendante*** *(autrement dit, il est supposé que le résultat d'une épreuve n'affecte pas le résultat des autres).*

Remarque. Schématiquement, un schéma de Bernoulli consiste à agrandir l'arbre autant de fois que de le nombre de répétitions (ci-dessous 2 et 3 répétitions) :



Par la suite, nous utiliserons les notations S : « succès » et $\bar{S}$: « échec ».

Voyons quelques exemples de schéma de Bernouilli.

Exemple 6.3.1. 1. Reprenons l'exemple de l'industriel et supposons que la probabilité qu'une ampoule soit défectueuse soit égale à $0,003$ (autrement dit $\mathbb{P}(S)=0,003$). Si l'industriel test son stock de $4\,000$ ampoules, il s'agit d'un schéma de Bernoulli avec $4\,000$ répétitions.

2. Un sac contient 10 boules, indiscernables au touché, numérotées de 1 à 10. Le joueur tire successivement et avec remise 4 boules du sac (on remet la boule obtenue dans le sac après chaque tirage). Le joueur gagne si le numéro est inférieur ou égale à 3.

   Ici, l'épreuve de Bernoulli consiste à trier une boule du sac ; le succès correspond à obtenir « un numéro inférieur ou égale à 3 »avec $p = 0,3$. Cette épreuve est répétée quatre fois de façon indépendantes (puisque les tirages sont avec remise). Il s'agit d'un schéma de Bernoulli.

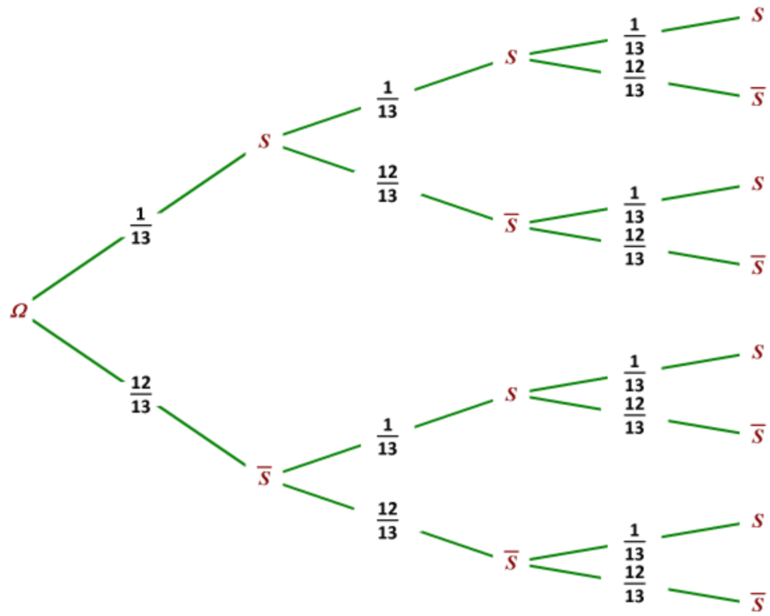
Maintenant que les définitions ont été donné et illustré, il est important de maitriser les propriétés suivantes :

- Un schéma de Bernoulli est représenté par un arbre pondéré.
- Sur chaque branche de l'arbre est écrite la probabilité associée.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur les branches.

Voyons un exercice typique du chapitre.

Exemple 6.3.2. Supposons que nous ayons à disposition un sac contenant 12 boules noires et 1 boule blanche ; ces boules sont supposées indiscernables au touché. Nous tirons une boule au hasard dans le sac, notons sa couleur puis replaçons la boule dans le sac. Nous répétons ce tirage trois fois de suite et appelons succès le fait d'obtenir une boule blanche.

1. Il s'agit bien d'une épreuve de Bernoulli puisque l'expérience aléatoire ne comporte que deux issues (on obtient une boule noire ou une boule blanche). Comme les boules sont indiscernables au touché, nous savons que $\mathbb{P}(S) = \frac{1}{13}$.
2. Ensuite, il convient de représenter la situation à l'aide d'un arbre.



3. Grâce à cet arbre, nous pouvons déterminer la probabilité d'obtenir 3 boules noires. Il est facile de réaliser que cet évènement correspond au chemin le plus bas dans l'arbre (i.e. obtenir $\bar{S}\bar{S}\bar{S}$). Nous avons donc

$$\mathbb{P}(\text{obtenir trois boules noires}) = \frac{12}{13} \times \frac{12}{13} \times \frac{12}{13} \approx 0,786$$

Nous avons multiplier entre elles les probabilités apparaissant sur le chemin correspondant à l'évènement « obtenir trois boules noires ».

4. Imaginons que nous souhaitons calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches. Nous constatons que plusieurs chemins correspondent à cet évènement : le chemin $SS\bar{S}$, le chemin $S\bar{S}S$ et le chemin $\bar{S}SS$. Pour chacun d'entre eux, nous obtenons les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(SS\bar{S}) = \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} \times \frac{12}{13} \approx 0,005 \quad ; \quad \mathbb{P}(S\bar{S}S) = \frac{1}{13} \times \frac{12}{13} \times \frac{1}{13} \approx 0,005$$

et

$$\mathbb{P}(\bar{S}SS) = \frac{12}{13} \times \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} \approx 0,005$$

Enfin, pour déterminer la probabilité de l'évènement « obtenir deux boules blanches » il suffit d'additionner ces trois résultats :

$$\mathbb{P}(\text{obtenir deux boules blanches}) = \mathbb{P}(SS\bar{S}) + \mathbb{P}(S\bar{S}S) + \mathbb{P}(\bar{S}SS) \approx 3 \times 0,005 = 0,015.$$

5. Enfin, il est possible qu'on nous demande quelle est la probabilité de l'évènement : « obtenir au moins une boule noire ». En réfléchissant, nous voyons qu'il y a de nombreuses possibilités (obtenir 1 boule noire, obtenir 2 boules noires ou obtenir 3 boules noires). Nous pourrions procéder comme dans le point précédent mais cela serait un peu laborieux. Mieux vaut utiliser un argument qui utilise une formule vue en seconde (pour tout évènement A, nous avons l'égalité $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{obtenir au moins une boule noire}) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{\text{obtenir au moins une boule noire}}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\text{ne pas obtenir de boule noire}) \\
&\approx 1 - \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = 0,999.
\end{aligned}$$

Remarque. Il existe une forme permettant de calculer directement le nombre de chemins contenant exactement k succès sur les n répétitions. Cela porte le nom de coefficient binomiaux et se note $\binom{n}{k}$. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés et sont également liés aux identités remarquables, cependant nous utiliserons plutôt la calculatrice pour les déterminer. Le lecteur curieux pour se reporter à la page 202 du livre pour plus de détails à ce sujet.

Exercices à traiter : 39 page 212.

6.4 Loi binomiale

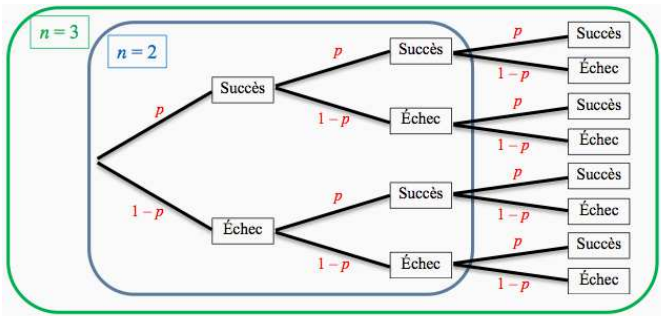
La loi binomiale est la loi naturellement associée à un schéma de Bernoulli.

Définition 6.4.1. *Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli comportant n répétitions et dont la probabilité de succès vaut $p \in [0;1]$. Nous dirons que cette variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètre n et p (nous noterons cela par $X \sim B(n;p)$. De plus, sa loi est donnée par*

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \textit{pour tout} \quad k \in \{0; \ldots ; n\}.$$

Autrement dit, nous avons une formule pour calculer directement la probabilité d'obtenir k succès sur n répétitions.

Remarque. Prenons un instant pour expliquer ce que représente la quantité $\binom{n}{k}$ (lire « k parmi n »). Cette dernière permet de dénombrer, en considérant un schéma de Bernoulli avec n répétitions, le nombre de chemins contenant exactement k succès parmi les n répétitions. Nous avons déjà fait ce genre de calculs, à la main, en utilisant un arbre : ci-dessous, $n = 3$ et il y a précisément 3 chemins comportant exactement 1 succès.



Bien entendu, lorsque n est plus grand ($n = 10$ ou $n = 20$ par exemple) il ne semble pas raisonnable de dessiner l'arbre associé. Si $n = 10$, pour déterminer le nombre de chemins comportant exactement 3 succès, il suffit de calculer 3 parmi 10 (i.e. $\binom{10}{3}$) à l'aide de la calculatrice. Voici une vidéo expliquant la manipulation à faire :

https://www.youtube.com/watch?v=ZIy1AWJu8tg&list=PLVUDmbpupCapZdNo8QaVDkWz3eqneIYK1&index=2

Cette année, il sera important d'être capable de faire cette manipulation. Pour certains, dans l'optique de l'enseignement supérieur, il pourrait être utile d'être capable de faire ce calcul à la main : par définition

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{5!7!}$$

où, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $k! = k \times (k-1) \times (k-2) \ldots \times 2 \times 1$; par convention $0! = 1$. Ainsi,

$$\frac{20!}{5!15!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \ldots \times 1}{3! \times 7 \times 6 \times \ldots \times 1} = \frac{10 \times \ldots \times 8}{3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

après avoir simplifier la fraction à plusieurs reprises.

Exemple 6.4.1. Reprenons notre exemple l'urne contenant 1 boules blanches et 12 boules noires. Le succès correspondait à obtenir une boule blanche (i.e. $\mathbb{P}(S) = \frac{1}{13}$), il y avait $n = 3$ répétitions indépendantes. Si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès nous savons que

$$X \sim B(3; \frac{1}{13}).$$

De plus, la probabilité d'obtenir deux succès (i.e. deux boules blanches sur les trois répétitions avec remise) vaut

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{13}\right)^2 \left(\frac{12}{13}\right)^{3-2} = 3 \times \left(\frac{1}{13}\right)^2 \left(\frac{12}{13}\right)^1 \approx 0,015.$$

Enfin, nous avons un dernière résultat.

Proposition 19. *Si $X \sim B(n; p)$ alors*

- $\mathbb{E}[X] = np$.
- $\mathrm{Var}(X) = np(1 - p)$.
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.

Exercices à traiter : 48 page 213, 50 page 213, 53 page 213, 72,73 page 217 (dont 1 en DM).