Chapitre 7

Calcul intégral

7.1 Primitives

Plus tôt nous avons vu comment **calculer des dérivées** afin de déterminer les variations d'une fonction f donné : pour cela nous calculions f' et devions étudiés son signe. Dans ce chapitre nous allons procéder dans le sens contraire : **étant donnée f', il faut retrouver la fonction f initiale**.

Exemple 7.1.1. Soient $f(x) = 6x^2 - 3$ et $F(x) = 2x^3 - 3x + 4$. Il n'est pas difficile de montrer que $F' = f$.

La fonction F joue un rôle particulier vis-à-vis de la fonction f, il s'agit de la notion de **primitive**.

Définition 7.1.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. F est une **primitive** de f si $F' = f$.*

Remarque. Si F est une primitive de f alors $F + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ (une constante) l'est aussi.

Pour trouver des primitives, il suffit de lire le tableau des dérivées de droite à gauche.

Fonction	Expression	Primitive
constante	$f(x) = p$	$F(x) = px + C$
identité	$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2} + C$
carré	$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$
cube	$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{x^4}{4} + C$
inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + C$
exponentielle	$f(x) = e^{ax+b}$	$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$

avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Voyons quelques exemples permettant de mieux appréhender cette nouvelle notion.

Exemple 7.1.2.
1. Si $f(x) = x^3 + 4x - 2$ alors $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^2 - 2x + C$.
2. Si $f(x) = 3\exp(3x - 2)$ alors $F(x) = \exp(3x - 2)$.
3. Si $f(x) = \frac{4}{x}$ alors $F(x) = 4\ln x$.

A toutes fins utiles, nous indiquons comment procéder dans deux cas de figures, un peu plus complexes.

Proposition 17.
1. *Les primitives de $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ (avec $u(x) > 0$) sont de la forme*

$$F(x) = \ln[u(x)] + C.$$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les primitives de $f(x) = u'(x)u(x)^n$ sont de la forme*

$$F(x) = \frac{1}{n+1}u(x)^{n+1} + C.$$

Nous donnons ci-dessous, deux applications de ce résultat.

Exemple 7.1.3.
1. Si $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ nous avons $F(x) = \ln(x^2 + 1) + C$.
2. Si $f(x) = 2x(x^2 + 1)^3$ alors $F(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + C$.

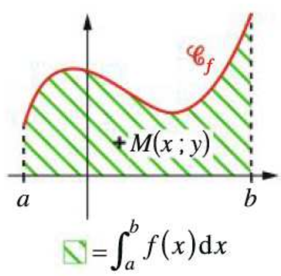
Traiter les exercices 1 **à** 4 **de la feuille associée**.

7.2 Calcul intégral

La notion d'intégrale permet de **calculer des aires ou des probabilités** (comme nous le verrons plus tard dans un chapitre ultérieur). En effet, la notation

$$\int_a^b f(x)dx$$

désigne l'aire comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les points $x = a$ ainsi que $x = b$.



Calculer la valeur de l'intégrale d'une fonction f est relativement simple, il suffit d'avoir préalablement déterminer F une primitive de f.

Définition 7.2.1. *Si F est une primitive d'une fonction f alors*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Remarque. L'intégrale d'une fonction sur un intervalle est donc **un nombre réel**.

Voyons cela en application sur différents exemples.

Exemple 7.2.1.
1. $\int_{-1}^2 xdx = [x^2]_{-1}^2 = 2^2 - (-1)^2 = 3$
2. $\int_1^e \frac{1}{t}dt = [\ln t]_1^e = 1$
3. $\int_0^2 e^{-3t+1}dt = [-\frac{1}{3}e^{-3t+1}]_0^2 = \frac{1}{3}(e - e^{-5})$.

Traiter les exercices 5 **à** 8 **de la feuille associée**.

Bien entendu, quelques arguments géométriques élémentaires permet de déterminer l'aire de domaines plus complexes. Ci-dessous, nous donnons un exemple dans lequel nous calculons l'aire comprise entre deux courbes.

Exemple 7.2.2. Imaginons que nous souhaitions calculer l'aire comprise entre la courbe $y = \frac{1}{x} + x$ et la courbe $y = x$ sur l'intervalle $[1;2]$. En utilisant l'interprétation géométrique de l'intégrale, nous constatons qu'il suffit de calculer la quantité suivante :

$$\int_1^2 x + \frac{1}{x}dx - \int_1^2 xdx.$$

Remarque. Les arguments peuvent être employés dans de nombreuses situations (modulo quelques variations). La plupart du temps, un dessin suffit amplement pour clarifier la situation et savoir quelles sont les intégrales à déterminer.

Mentionnons en passant la quantité suivante.

Définition 7.2.2. *Le nombre $V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ désigne la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.*