Chapitre 7

Chaines de Markov

Les chaînes de Markov sont parmi les objets probabilistes les plus simples permettant de modéliser des situation impliquant de la dépendance. Dans le cadre des chaînes de Markov, l'information utile pour la prédiction du futur est entièrement contenue dans l'état présent du processus et n'est pas dépendante des états antérieurs (i.e. le système n'a pas de « mémoire »). La terminologie provient du mathématicien russe Andreï Markov $(1852-1922)$ qui publia les premiers résultats dans ce domaine en 1906.

Il semblerait que Markov s'est penché sur ce genre d'objets suite à un désaccord avec Pavel Nekrasov. Ce dernier était persuadé que certains résultats classiques des probabilités (loi faible des grands nombres) ne pouvaient être obtenus en l'absence d'indépendance. L'histoire montre que Markov avait raison et il démontra plusieurs résultats allant dans son sens.

En 1912 Henri Poincaré étudia certaines chaines de Markov particulière dans le but de mieux comprendre comment se comporte les différentes manières de mélanger un jeu de cartes.

A partir de 1928, Maurice Fréchet commença à s'intéresser aux chaines de Markov et fini par publier, en 1938, une étude détaillée de celles-ci.

En 1936, Kolmogorov propose une généralisation des travaux de Markov (pour des temps continus) : il s'agit des processus de Markov. Pour cela, Kolmogorov fut inspiré par les travaux de Louis Bachelier sur la fluctuation des marchés financiers mais aussi par les travaux de Norbert Wiener sur le modèle du mouvement Brownien introduit par Einstein.

Depuis, de nombreux mathématiciens ont contribué à cet important domaine des probabilités. Sans pouvoir proposer une liste exhaustive, citons tout de même William Feller (à partir des années 30) et Eugene Dynkin (à partir des années 50). Les travaux de recherche dans ce domaine et ses généralisations sont toujours d'actualité.

Ce chapitre est un des points culminant du programme, dedans nous allons mêler probabilités, graphes, matrices et suites.

7.1 Introduction

Imaginons la situation suivante : Ike n'aime pas rendre le bus pour aller à l'école et préfère prendre son vélo. Il n'utilise pas d'autre moyen de locomotion. Chaque jour de la semaine, il va à l'école en bus avec une probabilité de $0,8$ s'il ne l'a pas emprunté la fois précédente et avec une probabilité de $0,3$ sinon.

Il semble naturel de se poser les questions suivantes :

- Si le lundi, Ike tire son moyen de locomotion à pile ou face, quelle est la probabilité qu'il aille à l'école en bus le jeudi ?
- A la fin de l'année, est-il plus probable qu'il se rende à l'école en vélo ou en bus ?
- Comment représenter ceci à l'aide d'un graphe ?
- Si nous modélisons la situation par un graphe, comment faire le lien avec les matrices ?
- Comment exprimer de manière formelle, la situation précédente à l'aide d'une suite de variables aléatoires ?

Les sections suivantes ont pour objectif de présenter le matériel nécessaire pour répondre à ces interrogations.

7.2 Définitions

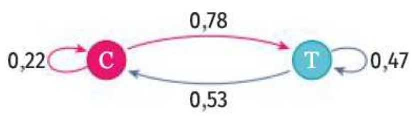
Reprenons ce que nous avons déjà vu plus tôt dans l'année sur les graphes et ajoutant cette fois-ci des poids aux arêtes.

Définition 7.2.1. *1. Un **graphe pondéré** est un graphe dans lequel chaque **arête** est **affectée** d'un nombre réel positif appelée **poids**.*

*2. Un graphe **probabiliste** est un graphe **orienté** et **pondéré** par des réels compris entre* 0 *et* 1*. De plus, la **somme des poids des arêtes issues de chaque sommet vaut** 1.*

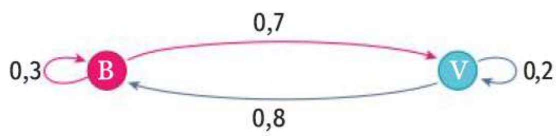
Par la suite, nous allons nous focaliser sur les graphes probabilistes. Voyons si nous ne pourrions pas naturellement déterminer le graphe associé au trajet de Ike.

Exemple 7.2.1. 1. Voyons un premier exemple



Nous constatons bien que la somme des poids des arêtes issues du sommet C vaut 1, de même pour le sommet T.

2. Si B désigne le bus et V le vélo, un court moment de réflexion montre que les décisions de Ike sont modélisées par le graphe suivant :



Exercices à traiter : 28 et 29 page 221 ; 49 et 50 page 223.

Tout ceci nous mène à la définition d'une chaîne de Markov (homogène) à valeurs dans un espace d'état E.

Définition 7.2.2. *Soit E un ensemble. Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans E si pour toute famille $(i_0, \dots, i_n)$ de points de E telle que*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) > 0$$

alors

$$\mathbb{P}\Big(X_n = i_n \big| X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\Big) = \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}).$$

Autrement dit, la probabilité de se trouver en i_n à l'instant n ne dépend que de la position X_{n-1} et non du reste de la trajectoire.

*La probabilité $\mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1})$ s'appelle **la probabilité de transition** de l'état i_{n-1} à l'état i_n ; cette quantité est supposée indépendante de n et nous la noterons $p_{n-1,n}$.*

Remarque. Cette année nous allons nous limiter à l'étude des chaîne de Markov lorsque E est fini et ne contient que 2 ou 3 états.

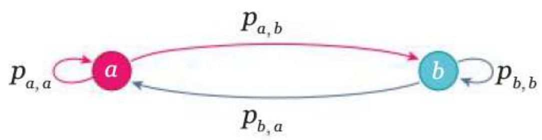
Voyons un exemple.

Exemple 7.2.2. La marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ est déterminée comme suit : à chaque instant, la suite avance sur l'entier suivant avec une probabilité $\frac{1}{2}$ ou recule sur l'entier précédente avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

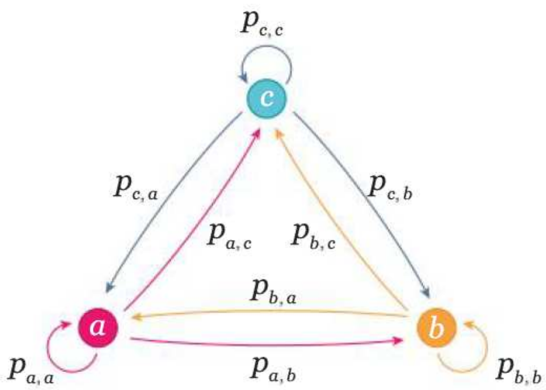
Remarque. Il est possible de définir des marches aléatoires sur l'ensemble des permutations à n éléments. Cela permet ensuite de modéliser les mélanges de paquets de cartes.

Il n'est pas difficile (et très pratique) de représenter une chaîne de Markov à l'aide d'un graphe probabiliste. Pour cela, il suffit que les poids correspondent au probabilités de transition.

Exemple 7.2.3. • Graphe d'une chaîne de Markov à deux états (a et b) :



• Graphe d'une chaîne de Markov à trois états (a, b et c) :



Remarque. Il faut encore avoir en tête que la somme des poids issues du même sommet vaut 1. Par exemple, dans le cas d'une chaîne de Markov à deux états, nous avons

$$p_{a,a} + p_{a,b} = 1$$

Ce qui n'est pas étonnant puisque, partant de a, les seules possibilités sont de rester en a ou bien d'aller en b.

Exercices à traiter : 33, 34 (Q1) page 221.

7.3 Représentation matricielle

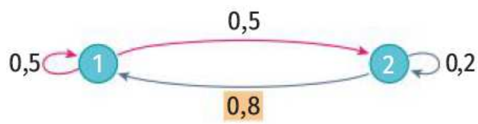
Les graphes sont très pratiques pour résumer de manière synthétique une situation, cependant ils ne permettent pas directement de faire des calculs. A la place, il faut utiliser la **matrice** dite **de transition** qui est composée des probabilités de transitions.

Définition 7.3.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace d'états fini $E = \{1,\ldots,n\}$. La **matrice de transition** associée à cette chaîne est la matrice carrée (de taille n) $P = (p_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ telle que, pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$,*

$$p_{ij} \quad \textit{correspond à probabilité de transition de l'état} \quad i \quad \textit{vers l'état} \quad j.$$

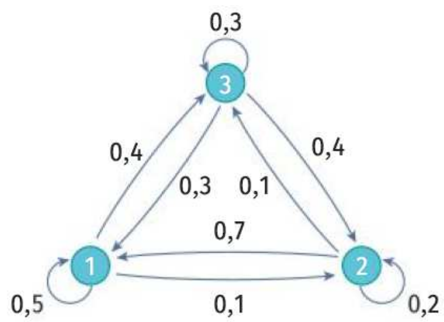
Voyons sur deux exemples.

Exemple 7.3.1. 1. La chaîne de Markov représentée ci-dessous admet pour matrice de transi-



tion $P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$. Le coefficient $0,8$ indique la probabilité de passer de l'état 2 à l'état 1.

2. La chaîne de Markov représentée ci-dessous



admet pour matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$

Remarque. Observons que, pour chaque ligne, la somme sur les colonnes vaut toujours 1 et les coefficients $p_{ij} \in [0,1]$ pour tout $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. Lorsqu'une telle matrice vérifie ce genre de propriétés, nous dirons qu'elle est stochastique.

Voyons comment effectuer quelques calculs élémentaires sur les chaînes de Markov.

Exemple 7.3.2. En utilisant la chaîne de Markov (à deux états) définie dans l'exemple précédent. Nous notons $(X_n)_{n\geq 0}$ la position de la chaîne à l'instant $n \in \mathbb{N}$. Si $X_0 = \mathbf{1}$ quelle est la probabilité que la chaîne se trouve à nouveau en $\mathbf{1}$ à l'instant $n = 2$? Autrement dit, que vaut

$$\mathbb{P}(X_2 = \mathbf{1})?$$

Pour l'instant, nous n'avons pas d'autres choix que d'utiliser des probabilités conditionnelles afin de faire apparaitre les probabilités de transitions. Rappelons au passage la relation suivante :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B) \quad \text{lorsque} \quad \mathbb{P}(B) > 0. \tag{7.3.1}$$

Ainsi, pour déterminer $\mathbb{P}(X_2 = \mathbf{1})$, il nous suffit d'étudier ce qui a pu se produire avant (à l'instant $n = 1$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 = \mathbf{1}) &= \mathbb{P}(X_2 = \mathbf{1} \cap X_1 = \mathbf{1}) + \mathbb{P}(X_2 = \mathbf{1} \cap X_1 = \mathbf{2}) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = \mathbf{1}|X_1 = \mathbf{1})\mathbb{P}(X_1 = \mathbf{1}) + \mathbb{P}(X_2 = \mathbf{1}|X_1 = \mathbf{2})\mathbb{P}(X_1 = \mathbf{2}) \end{aligned}$$

où, dans la dernière égalité, nous avons utilisé la relation (7.3.1). En outre, d'après le graphique

$$\mathbb{P}(X_2 = \mathbf{1}|X_1 = \mathbf{1}) = 0,5 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_2 = \mathbf{1}|X_1 = \mathbf{2}) = 0,5.$$

D'où,

$$\mathbb{P}(X_2 = \mathbf{1}) = 0.5 \times \mathbb{P}(X_1 = \mathbf{1}) + 0,8 \times \mathbb{P}(X_1 = \mathbf{2}).$$

Il suffit ensuite de recommencer ce procédé une dernière fois :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = \mathbf{1}) &= \mathbb{P}(X_1 = \mathbf{1} \cap X_0 = \mathbf{1}) + \mathbb{P}(X_1 = \mathbf{1} \cap X_0 = \mathbf{2}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = \mathbf{1}|X_0 = \mathbf{1})\mathbb{P}(X_0 = \mathbf{1}) \\ &= 0,5 \times 1. \end{aligned}$$

Dans ce qui précède, nous avons utilisé que $\mathbb{P}(X_0 = \mathbf{1}) = 1$ et donc $p(X_1 = \mathbf{1} \cap X_0 = \mathbf{2}) = 0$. En utilisant les mêmes arguments, nous montrons également que

$$\mathbb{P}(X_1 = \mathbf{2}) = 0,8.$$

En conclusion, nous avons donc démontré que (sachant $X_0 = \mathbf{1}$)

$$\mathbb{P}(X_2 = \mathbf{1}) = 0,5^2 +, 5 \times 0,8 = \dots.$$

Bien qu'élémentaires, les calculs précédents ne sont pas très agréables à écrire. Nous verrons dans la section suivante comment remplacer ces derniers par des calculs matriciels.

Proposition 41. *écrire une proposition résumant l'argument précédent.*

Exercices à traiter : 30, 31 page 221 ; 56, 57 page 224 ; 60 page 225.

7.4 Evolution d'une chaîne de Markov

Maintenant que nous avons trouvé des moyens pratiques pour représenter des chaînes de Markov, voyons comment celles-ci évoluent. En réfléchissant un peu, nous constatons que nous avons besoin de connaitre seulement deux quantités (cette caractérisation est donnée plus précisément dans la proposition suivante) :

- la loi de la probabilité initiale (i.e. la situation initiale),
- la matrice de transition P expliquant comme passer d'un état à l'autre.

Par commodité, les **lois de probabilités seront représentées par des vecteurs lignes**.

Exemple 7.4.1. La loi associée à un pile ou face est notée $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ si la pièce est équilibrée.

7.4.1 Loi de X_n

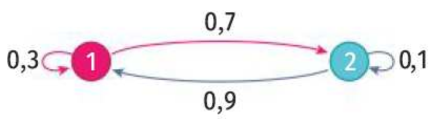
Proposition 42. *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une chaîne de Markov de matrice de transition* P *et de loi initiale* π_0*. La loi* π_n *de* X_n *(en abrégé :* $\mathcal{L}(X_n) = \pi_n$*) vérifie les relations suivantes :*

$$\pi_{n+1} = \pi_n P \quad \textit{et} \quad \pi_n = \pi_0 P^n \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Remarque. Le lecteur attentif aura observé la similarité avec le chapitre précédent (à la différence que nous avons des vecteurs lignes plutôt que des vecteurs colonnes). Finalement, nous avons ramené nos **calculs à des produits de matrices.**

Pour avoir plus d'intuition sur cette nouvelle notion, observons ce qui se produit sur deux exemples.

Exemple 7.4.2. 1. Considérons la chaîne de Markov dont le graphe est donné par



et dont la loi initiale est $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$. Dans ce cas, la loi $\pi_3 = \mathcal{L}(X_3)$ est donnée par

$$\pi_3 = \pi_0 P^3$$

avec $P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$. Par suite, $\pi_3 = \begin{pmatrix} 0,576 & 0,424 \end{pmatrix}$. Autrement dit, la loi de X_3 se résume en

x_i	1	2
$\mathbb{P}(X_3 = x_i)$	$0,576$	$0,424$

2. Nous pouvons à présent répondre à la question de l'introduction (quelle est la probabilité qu'Ike aille en bus à l'école le jeudi ?). D'après l'énoncé, la loi initiale est

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Ce qui se produit le jeudi est déterminé par la loi de $\pi_3 = \pi_0 P^3$. Puisque $P^3 = \begin{pmatrix} 0,475 & 0,525 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$, nous en déduisons que $\pi_3 = \begin{pmatrix} 0,5375 & 0,4625 \end{pmatrix}$. La probabilité qu'Ike aille à l'école en bus le jeudi de la semaine de la rentrée est donc de $0,5375$.

Exercices à traiter : 63, 67 page 225 ; 70 page 226 ; 74 page 227 (sauf question 2). ; 75 page 227.

7.4.2 Mesures invariantes et convergence à l'équilibre

Penchons nous à présent sur le **comportement asymptotique d'une chaîne de Markov** (lorsque $n \to +\infty$). Tout d'abord, il convient d'observer que certaines lois de probabilités jouent un rôle particulier si elles correspondent à la loi initiale de la chaîne.

Définition 7.4.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P. π est une mesure invariante de la chaîne si*

$$\pi P = \pi$$

Remarque. Implicitement, cela induit que **la chaîne de Markov n'évolue plus** : la loi de X_n est la même celle de X_{n-1},... qui est la même que celle de X_1 laquelle coïncide avec celle de X_0. **Il n'est pas supposée que π soit une mesure de probabilité** (i.e. la somme des coefficients du vecteur ligne π vaut pas forcément 1).

Voyons sur un exemple.

Exemple 7.4.3. Considérons une chaîne de Markov dont la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier que $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ est une **probabilité invariante** (la somme des coefficients vaut 1). En effet,

$$\pi_0 P = \begin{pmatrix} 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,9 & 0,6 \times 0,6 + 0,4 \times 0,1 \end{pmatrix} = \pi_0.$$

De la même manière, nous pourrions aussi montrer que $\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 2,4 & 1,6 \end{pmatrix} = 4 \times \pi$ est une **mesure invariante** (mais pas une loi de probabilité puisque la somme des coefficients vaut 4).

Exercices à traiter : 35p221 ; 64, 65 p225 ; 76 page 227.

Dans ce qui suit, **nous ne considérons pas les mesures invariantes qui ne sont pas des lois de probabilités et rappelons que l'espace d'états E est fini** (dans notre cas, il ne contient que 2 ou 3 éléments). Voici un résultat qui confirme ce que nous avons observé dans l'exemple précédent.

Proposition 43 (Existence d'une loi de probabilité invariante)**.** *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P. Alors **il existe une loi de probabilité invariante** π telle que*

$$\pi P = \pi$$

Remarque. Lorsque E est infini dénombrable les choses sont plus délicates. Il peut n'y avoir aucune mesure invariante, une ou des mesures invariantes mais pas de loi de probabilités invariante, une ou des lois de probabilités invariantes. Nous n'entrerons clairement pas dans dans ce degré de généralité, l'étude du cas fini nécessite déjà une analyse fine des différents états de la chaîne (récurrent ou transient) que nous allons devoir admettre.

Maintenant que nous savons qu'il est possible **d'exhiber une loi de probabilité faisant office d'équilibre** (dès que la chaîne arrive dans cette configuration, sa loi ne change plus), il est naturel de s'interroger : est-ce qu'au bout d'un moment (lorsque $n \to +\infty$) une **chaîne de Markov finit par se stabiliser sur sa loi de probabilité invariante ?**

Théorème 44 (Convergence à l'équilibre)**.** *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P et π_0 sa loi initiale.* ***Si** P **ne contient aucun** 0 alors la suite des matrices lignes $(\pi_n)_{n\geq 0}$ **converge vers l'unique loi de probabilité invariante** π de la chaîne de Markov.*

Remarque. De nombreuses choses sont passées sous silence dans ce théorème. Notons que sous les hypothèses de ce dernier, nous avons obtenu **l'unicité de la loi de probabilité invariante**. Par ailleurs, la condition P ne contient aucun 0 s'exprime aussi en disant que **la chaîne de Markov est irréductible** : cela signifie qu'en partant de n'importe quel état $i \in E$, nous sommes assurés de revenir en i en un temps fini (nous dirons alors que i est un **état récurrent**). il se trouve que **le temps de retour moyen** est l'un des éléments qui permet de déterminer l'unique loi de probabilité invariante.

Tout ceci peut sembler un peu obscur, voyons ce qui se produit sur un exemple.

Exemple 7.4.4. Reprenons l'exemple de l'introduction est déterminons la probabilité qu'Ike aille à l'école en vélo à très long terme.

La matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$ ne contient aucun 0. D'après le théorème 44 **il existe donc une unique loi de probabilité invariante** π. Notons celle-ci sous la forme

$$\pi = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$$

et déterminons la valeur de x et de y. Puisqu'il s'agit d'une loi de probabilité, nous savons que $x + y = 1$. De plus, puisqu'il s'agit d'une mesure invariante, nous savons aussi que la relation

$$\pi P = \pi$$

est aussi satisfaite. Autrement dit, en identifiant les coefficients de chaque vecteurs, nous avons

$$0,3x + 0,8y = x \quad \text{et} \quad 0,7x + 0,2y = y.$$

Ces deux dernières égalités sont en fait équivalentes. C'est pourquoi tout ceci mène à un **système d'équations** satisfait par les coordonnées du vecteur π :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 0,3x + 0,8y = x \end{cases}$$

dont la résolution nous fournit la solution $(x; y) = \left(\frac{8}{15}; \frac{7}{15}\right)$. En conclusion, la loi de probabilité invariante est donnée par

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}$$

et la probabilité qu'Ike aille à vélo à très long terme vaut $\frac{7}{15}$.

Exercices à traiter : 36 page 221, 79, 80, 81 page 228 ; 83 page 229 (en DM)