Chapitre 7

Suites et matrices

Dans ce chapitre, nous allons voir de quelle manière la notion de suites et de matrices peuvent se mélanger.

7.1 Introduction

Considérons une forêt dans laquelle vivent deux espèces : des lapins et des renards ; les premiers étant les proies des seconds. Nous cherchons à modéliser l'évolution de chacune de ces deux espèces.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous noterons respectivement par $(r_n)_{n\geq 0}$ et $(l_n)_{n\geq 0}$ la population de renards et de lapin lors de l'année $2020+n$. Il est alors possible de définir un modèle (une version discrète du modèle de proies/prédateurs de Lotka-Volterra) décrivant l'évolution de ces deux espèces. Sans la présence des lapins, la première serait vouée à disparaitre tandis que la population des lapins augmenterait exponentiellement sans la présence des prédateurs. Mathématiquement, cela correspond au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} r_{n+1} = 0,9r_n + 0,01l_n \\ l_{n+1} = -r_n + 1,01l_n \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} r_0 = 10 \\ l_0 = 10\,000 \end{array}\right.$$

Les valeurs des constantes intervenant dans le système ne sont là que pour fixer les idées.

Comme nous allons le voir, il est possible de représenter ce système matriciellement. En effet, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ l_n \end{pmatrix}$ nous constatons que

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,01 \\ -1 & 1,01 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons alors une suite de matrices (composée ici par des vecteurs colonnes) $(X_n)_{n\geq 0}$ vérifiant une relation de récurrence semblable à celle des suites géométriques (pour passer d'un terme à l'autre, il suffit de multiplier par une matrice A donnée). Les questions suivantes sont alors naturelles :

- Est-il possible d'exprimer X_n en fonction de n de manière explicite ?
- Que se produit-il si $n \to +\infty$?

7.2 $U_{n+1} = AU_n$

Cette section a pour vocation de généraliser aux matrices des notions que vous avez déjà rencontré dans votre scolarité en étudiant les suites géométriques.

Définition 7.2.1. *Une suite de matrices colonnes de taille $k \times 1$ est une fonction qui, à tout entier naturel n, associe une matrice colonne de même taille.*

Remarque. Bien entendu, il est possible de définir la même chose pour matrices lignes de taille $1 \times k$

Comme l'exemple ci-dessous le montre, tout ceci est aussi transparent que nous aurions pu le penser

Exemple 7.2.1. L'application

$$n \mapsto \begin{pmatrix} n \\ n^2 \end{pmatrix}$$

définit une suite $(U_n)_{n\geq 0}$. En particulier, $U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $U_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \end{pmatrix}$.

Exercice à traiter : 37 page 222.

Voyons à présent ce qui se produit lorsqu'une relation de récurrence particulière est vérifiée.

Proposition 38. *Soient A une matrice carrée de taille k et $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite de matrices colonnes de taille $k \times 1$ définie par*

$$\begin{cases} U_0 \\ U_{n+1} = AU_n \end{cases} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$U_n = A^n U_0 \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Remarque. D'une certaine manière A joue le rôle de la raison d'une suite « géométrique ». La démonstration s'effectue par récurrence sur la dimension n est laissée en exercice.

Exemple 7.2.2. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite de matrices colonnes définie récurrence à l'aide de $U_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de la relation

$$U_{n+1} = AU_n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, $U_1 = AU_0 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$. D'après la proposition précédente, nous savons que

$$U_n = A^n U_0.$$

En particulier, $U_{10} = A^{10} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\,782 \\ 22\,234 \end{pmatrix}$.

Remarque. Contrairement aux suites géométriques, il n'est pas toujours facile d'exploiter la formule explicite puisque celle-ci nécessite de calculer la puissance n-ième d'une matrice ; les calculs associés peuvent rapidement devenir complexes.

Exercices à traiter : 24 page 220 (25p220 à la maison) ; 26 page 220 ; 40 et 41 page 220.

7.3 $U_{n+1} = AU_n + B$

Ce genre de relation avait déjà été rencontrée en classe de première lors de l'étude de suites *arithmético-géométrique*. Dans ce qui suit nous supposons que A est une matrice carrée de taille k telle que $I_d - A$ **soit une matrice inversible** et B est un vecteur colonne de taille $k \times 1$. Autrement dit, nous considérons $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de matrices colonnes de taille $k \times 1$ définie par récurrence à l'aide d'une matrice colonne U_0 et de la relation

$$U_{n+1} = Au_n + B \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 39. *Dans le contexte précédent, notons $C = (I_d - A)^{-1}B$ et considérons la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ définie par $V_n = U_n - C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(V_n)_{n\geq 0}$ vérifie la relation*

$$V_{n+1} = AV_n \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

De plus, nous avons l'identité suivante

$$U_n = A^n(U_0 - C) + C \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Remarque. En pratique, il convient donc de **vérifier que** $I_d - A$ **est inversible**. Sans cela, la matrice C intervenant dans la proposition précédente n'existe pas.

Démonstration. Pour bien comprendre la démonstration, il convient de débuter par le cas réel. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels telle que

$$u_{n+1} = au_n + b \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$ [1]

A priori, nous devons trouver une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $v_n = u_n - c$ soit une suite géométrique de raison a. Puisque, par définition de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ et de la relation satisfaite par la suite $(u_n)n \geq 0$, nous avons

$$v_{n+1} = u_{n+1} - c = au_n + b - c$$

il serait fort agréable que c vérifie la relation

$$c = ac + b. \tag{7.3.1}$$

En effet, si c'est le cas, nous aurions (en utilisant (7.3.1) dans la première égalité)

$$v_{n+1} = au_n + b - (ac + b) = a(u_n - c) = av_n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

1. Il est supposé que $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$

par définition de $(v_n)_{n\geq 0}$. Nous pourrions alors conclure que $(v_n)_{g\geq 0}$ est une suite géométrique de raison a. Pour arriver à nos fins, nous devons donc résoudre l'équation

$$x = ax + b$$

afin de déterminer la constante c désirée. La résolution de cette équation est élémentaire :

$$x = ax + b \quad \Longleftrightarrow \quad x(1-a) = b \quad \Longleftrightarrow \quad x = (1-a)^{-1}b$$

à condition que $(1-a)^{-1}$ existe (i.e. $a \neq 1$). La suite s'obtient facilement en posant, dans un premier temps, $c = (1-a)^{-1}b$ (qui, par construction, vérifie la relation $c = ac + b$). Puis, dans un second temps, en utilisant la formulation explicite d'une suite géométrique (pour $(v_n)_{n\geq 0}$) pour enfin revenir à la suite de départ $(u_n)_{n\geq 0}$.

Il convient à présent de voir si le raisonnement précédent est suffisamment robuste pour s'appliquer aux matrices. Nous observons alors que nous devons trouver une matrice C, solution de l'équation

$$X = AX + B.$$

Par hypothèse $I_d - A$ est inversible donc

$$X = AX + B \quad \Longleftrightarrow \quad X(I_d - A) = B \quad \Longleftrightarrow \quad X = (I_d - A)^{-1}B$$

et le reste de la démonstration est identique. □

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 7.3.1. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie à l'aide $U_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ et de la relation

$$U_{n+1} = AU_n + B \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 \\ 0 & 1,1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Un rapide calcul montre que $I_d - A = \begin{pmatrix} 0,05 & 0 \\ 0 & -0,1 \end{pmatrix}$. En outre, puisque

$$\det(I_d - A) = -0,005 \neq 0,$$

$I_d - A$ est bien une matrice inversible. La proposition précédente nous assure alors que la suite la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ définie par $V_n = U_n - C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $C = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \end{pmatrix}$ vérifie

$$V_{n+1} = AV_n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par suite $V_n = A^n V_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

A toutes fins utiles, nous indiquons ci-dessous comment se comporte le binôme de Newton dans l'espaces des matrices carrées.

Proposition 40 (Binôme de Newton)**.** *Soit* $A, B \in M_k(\mathbb{R})$ *telles que* $AB = BA$*. Alors,*

$$(A+B)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^j B^{n-j} \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$ [2]

Remarque. Contrairement aux nombres réels, il est impératif de vérifier l'hypothèse de commutation $AB = BA$ pour appliquer la formule du binôme.

Exercices à traiter : 44 page 222 ; 47 page 222 ; 86 page 230 (DM)

2. rappelons que $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$