Chapitre 8

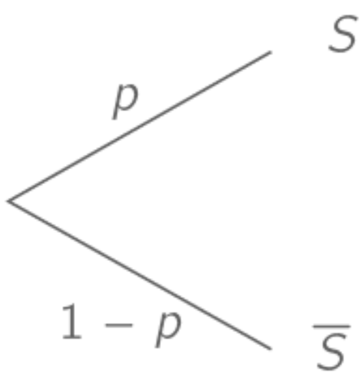
Loi Binomiale

Dans ce chapitre, nous allons étudier un type particulier d'expérience aléatoire.

8.1 Loi de Bernoulli

8.1.1 Epreuve de Bernoulli

Définition 8.1.1. *Soit $p \in [0,1]$, une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire comportant* ***deux issues*** *: un* **succès** *(noté S) de probabilité p et un* **échec** *(noté $\bar{S}$) de probabilité $1-p$.*



Voyons plusieurs exemples pour illustrer ceci.

Exemple 8.1.1.

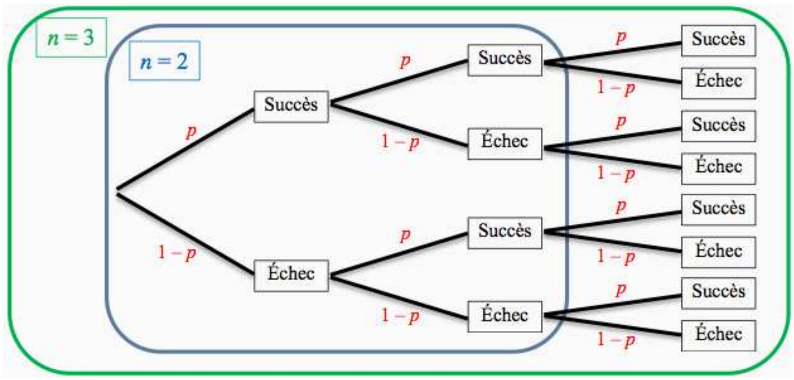
1. Jeu de pile ou face dans lequel on appelle **succès** le fait d'obtenir pile est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.
2. Un sac contient 10 boules, indiscernables au touché, numérotées de 1 à 10. L'expérience aléatoire consiste à tirer une boule du sac. Le joueur gagne si le numéro est inférieur ou égale à 3. Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle le **succès** est « obtenir un numéro inférieur à 3 »de probabilité $p = \frac{3}{10}$; **l'échec** est l'évènement « obtenir un numéro strictement supérieur à 3 »sa probabilité vaut $1 - 0,3 = 0,7$.

Voyons ce qui se produit lorsque nous répétons, dans les mêmes conditions, une épreuve de Bernoulli.

Exercices à traiter : 1 à 4 de la feuille associée.

8.1.2 Schéma de Bernoulli

Définition 8.1.2. *Un schéma de Bernoulli est la* ***répétition*** *(n fois), de façon* ***indépendante*** *(il est supposé que le résultat d'une épreuve n'affecte pas le résultat des autres), d'une même* ***épreuve de Bernoulli****.*



Voyons quelques exemples de schéma de Bernoulli.

Exemple 8.1.2. Un sac contient 10 boules, indiscernables au touché, numérotées de 1 à 10. Le joueur tire successivement et avec remise 4 boules du sac (on remet la boule obtenue dans le sac après chaque tirage). Le joueur gagne si le numéro est inférieur ou égale à 3.

Ici, l'épreuve de Bernoulli consiste à tirer une boule du sac ; le **succès** correspond à obtenir « un numéro inférieur ou égale à 3 »et $p = 0,3$. Cette épreuve est **répétée** $n = 4$ **de façon indépendantes** (puisque les tirages sont avec remise). Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

Les points suivants sont essentiels en pratique. Nous retrouvons d'ailleurs certaines des propriétés associées aux arbres pondérées.

Proposition 18.

- *Un schéma de Bernoulli est représenté par un arbre pondéré composé des issues S et $\bar{S}$.*
- *Sur chaque branche de l'arbre est écrite la probabilité p ou $1-p$.*
- *La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur les branches.*

Exercices à traiter : 1 à 4 de la feuille associée.

8.2 Loi Binomiale

Considérons un schéma de Bernoulli dans laquelle l'épreuve de Bernoulli est réalisée n fois ($n = 4, 5, 10, 100, \ldots$) et la probabilité de succès vaut p. Que se passe-t-il si nous comptons le nombre (aléatoire) de succès obtenu après ces n répétitions indépendantes ?

8.2.1 Variable aléatoire

Désignons par X la variable aléatoire (il s'agit d'une fonction dont le résultat est aléatoire) qui **compte le nombre de succès** lors des n répétitions. Forcément, X est un nombre entier compris entre 0 et n. Par la suite, nous allons nous intéresser à l'évènement « **obtenir** k **succès** » (où k est un nombre compris entre 0 et n ; formellement, cet évènement s'écrit $\{X = k\}$.

Exemple 8.2.1. Supposons que l'on fasse 20 pile ou face et que l'on désigne le succès par « obtenir pile ». Sur $n = 20$ répétitions, X compte le nombre de pile obtenu, ainsi $X \in \{0, 1, \ldots, 20\}$.

Nous allons ensuite chercher à déterminer la probabilité d'obtenir k succès parmi les n répétitions : autrement dit, que vaut $\mathbb{P}(X = k)$? Pour cela, nous allons utiliser une loi de probabilité particulière.

8.2.2 Loi binomiale

Définition 8.2.1. *Nous dirons que la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès (de probabilité $p \in [0; 1]$) d'un schéma de Bernoulli (avec n répétitions indépendantes) suit une loi binomiale de paramètre n et p. Nous noterons ceci par $X \sim B(n; p)$.*

Remarque. La calculatrice sera d'une aide précieuse pour calculer différentes probabilités associées à une loi binomiale. Nous renvoyons le lecteur vers la vidéo suivante à ce sujet :
https://www.youtube.com/watch?v=7k4ZYdfWEY8&list=PLVUDmbpupCapZdNo8QaVDkWz3eqneIYK1&index=27

Etant donné une variable aléatoire, il est intéressant de connaitre son espérance (analogue probabiliste de la « moyenne »).

Proposition 19. *Si $X \sim B(n; p)$ alors l'espérance de X vaut $\mathbb{E}[X] = np$.*

Voyons un exemple d'application.

Exemple 8.2.2. G.R.R. Martin, l'auteur de la saga *Game of Thrones* a tué un grand nombre des personnages principaux de son histoire. Il a avoué procéder comme suit pour décider si un personnage doit vivre ou mourir :

- Il lance un dé équilibré à 6 faces.
- Si le résultat est supérieur (ou égale) à 5 le personnage meurt, sinon il reste en vie.

Jusqu'ici, il semblerait qu'il ait utilisé le test précédent 30 fois. Nous noterons par X le nombre de mort (parmi les personnages principaux) dans les livres parus en librairie.

1. Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser la valeurs des paramètres n et p.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 12)$ et $\mathbb{P}(X \geq 20)$. Les résultats seront donnés avec 4 chiffres après la virgule.
3. Que vaut l'espérance de X, $\mathbb{E}[X]$?

Exercices à traiter : 5 à 10 de la feuille associée.