

Chapitre 8

Racines de l'unité et factorisation de polynômes dans $\mathbb{C}$

Dans cet ultime chapitre portant sur les nombres complexes, nous allons approfondir l'étude de la factorisation de polynôme à coefficients complexes.

8.1 Racines n -ièmes de l'unité

Délaissions les applications géométriques de nombres complexes pour étudier de nouveau les racines d'un polynôme et les méthodes de factorisation. En particulier, dans cette partie, nous allons nous focaliser sur un sous-ensemble du cercle unité $\mathbb{U}$.

Définition 8.1.1. Le cercle unité $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$ est défini par

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}.$$

Remarque. L'ensemble $\mathbb{U}$ vérifie des propriétés de stabilité par produit et quotient. Autrement dit, si $z, z' \in \mathbb{U}$ alors

$$zz' \in \mathbb{U} \quad \text{et} \quad \frac{z}{z'} \in \mathbb{U}.$$

Nous allons nous focaliser sur une partie de $\mathbb{U}$, il s'agit des **racines n -èmes de l'unité**.

Définition 8.1.2. Soit $n \in \mathbb{N}$, une racine de l'unité est une solution de l'équation $z^n = 1$. L'ensemble des racines n -èmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Exemple 8.1.1. i est une racine quatrième de l'unité puisque $i^4 = (-1)^2 = 1$. ± 1 sont des racines secondes de l'unité.

Il est naturel de se demander s'il est possible d'obtenir une description plus précise des racines de l'unité, la proposition suivante répond à cette question.

Proposition 45. L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n -èmes de l'unité correspond à l'ensemble suivant

$$\mathbb{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq k < n\}.$$

De plus, si $n \geq 3$, les points $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ forment un polygone régulier à n côtés.

Remarque. $\mathbb{U}_n$ contient exactement n éléments. D'une certaine manière nous venons d'associer à un polynôme (ici $P(z) = z^n - 1$) un ensemble $(\mathbb{U}_n)$, Galois fut le premier à observer ce genre de lien et à constater que les propriétés de l'ensemble associé avait des répercussions sur l'existence de solutions d'une équation polynomiale (ici $z^n - 1 = 0$).

Démonstration. Posons $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, par identification

$$z^n = 1 \iff r^n e^{in\theta} = 1 \iff \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta \equiv 0[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ n\theta = 2l\pi \text{ avec } l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

or, en effectuant la division euclidienne de l par n , nous avons $l = nq + k$ avec $0 \leq k < n$ et $q \in \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$\theta = q2\pi + \frac{2k\pi}{n} \iff \theta \equiv \frac{2k\pi}{n}[2\pi].$$

Ce qui termine la démonstration. □

Exemple 8.1.2. 1. Traitons le cas $n = 2$. $z^2 = 1 \iff z^2 - 1 = 0 \iff (z+1)(z-1) = 0$. Les deux racines de l'unité sont $z_0 = 1$ et $z_1 = -1$.

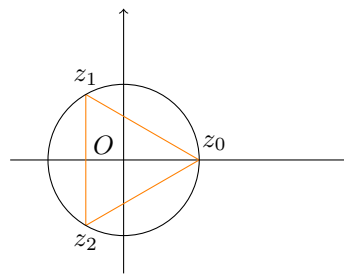
2. Si $n = 3$, il n'est pas difficile de voir que $z_0 = 1$ est de nouveau solution. Par suite, le polynôme $P(z) = z^3 - 1$ se factorise par $z - 1$. Autrement dit, il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que

$$z^3 - 1 = (z - 1)(az^2 + bz + c)$$

En développant et en identifiant les coefficients, nous trouvons que $a = b = c = 1$. Il ne reste plus qu'à déterminer les racines de $z \mapsto z^2 + z + 1$. Pour cela, il est possible d'utiliser Δ afin d'obtenir l'expression algébrique de z_1 et z_2 . Nous pouvons également utiliser la proposition précédente pour déterminer leur expression sous forme exponentielle :

$$z_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ et } z_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}.$$

Nous obtenons alors le polygone régulier suivant :



Remarque. Souvent $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est noté j et $e^{\frac{4i\pi}{3}}$, j^2 ou $\bar{j}$.

Exercices à traiter : 45 page 67 ; 126 page 75 à faire à la maison ; 124,128 page 75 ; 146 page 79 en DM.

8.2 Factorisation dans $\mathbb{C}$

Lors de l'étude des racines troisième de l'unité, nous avons procédé à une **factorisation**. Ce genre d'opération est, bien entendu, valable pour des polynômes de degrés plus élevé. Voyons comment généraliser la notion de polynôme vue en classe de 1ère.

Définition 8.2.1. 1. Dans $\mathbb{C}$, un polynôme non nul, à **coefficients réels**, P de degré n est de la forme

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $a_n \neq 0$.

2. Soit P un polynôme de degré n . Nous dirons que $a \in \mathbb{C}$ est une racine de P si $P(a) = 0$.

Remarque. 1. Bien entendu, il est possible de généraliser ceci en supposant que les coefficients a_i soient complexes.

2. Pour généraliser la notion de racine à des espaces plus abstraits (l'anneau euclidien $\mathbb{K}[X]$ des polynômes d'indéterminée X à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ par exemple). Nous dirons que $a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si

$$X - a \text{ divise } P.$$

Autrement dit, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P(X) = (X - a)Q(X) \quad \text{et} \quad 0 \leq \deg(Q) < \deg(P).$$

Ceci sous-entendant que le reste R de la division euclidienne de P par $X - a$ est nul. Bien entendu, ceci nous entraîne beaucoup plus loin que ce qui est inscrit dans le programme de terminale. Ces notions sont généralement étudiées durant les premières années d'études post-bac. Il s'agit de généraliser la notion de divisibilité euclidienne (étudiée dans $\mathbb{Z}$) aux espaces de polynômes.

Voyons un exemple.

Exemple 8.2.1. $P(z) = 5z^3 - 4z^2 + \frac{1}{2}z$ est un polynôme de degré 3.

Nous allons à présent constater qu'**étant donné une racine** a d'un polynôme, il est possible de le **factoriser par** $z - a$. De plus nous allons obtenir des informations sur le nombre de racines possédées par un polynôme de degré n .

Proposition 46. Soit P un polynôme de degré n et $a \in \mathbb{C}$ l'une de ses racines. Alors P se factorise par $(z - a)$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme Q de degré **strictement inférieur à** n tel que

$$P(z) = (z - a)Q(z).$$

En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons

$$z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + \dots + a^{n-2}z + a^{n-1}).$$

Remarque.

Voyons comment procéder sur un exemple.

Exemple 8.2.2. Soit $P(z) = z^3 - 6z^2 + 13z - 10$. Il n'est pas difficile de vérifier que 2 est une racine de P , il existe donc $Q(z) = az^2 + bz + c$ un polynôme de degré (au plus) 2 tel que

$$P(z) = (z - 2)(az^2 + bz + c).$$

Pour déterminer les nombres complexes a, b et c , il suffit de développer le membre de droite pour ensuite procéder à une identification des coefficients. Ici, nous avons

$$(z - 2)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - 2a)z^2 + (c - 2b)z - 2c.$$

Nous devons alors résoudre le système

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -6 \\ c - 2b = 12 \\ -2c = -10 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 5. \end{cases}$$

En résumé, $P(z) = (z - 2)(z^2 - 4z + 5)$.

Le théorème fondamental suivant concerne le nombre de racines d'un polynôme de degré n .

Théorème 47 (D'Alembert-Gauss). *Soit P un polynôme de degré n à coefficients complexes. Alors P admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$.*

Remarque. 1. Ce résultat est souvent désigné sous le nom *théorème fondamental de l'algèbre*, il en existe de nombreuses démonstrations. Avec les outils du lycée, il n'est pas possible de le démontrer. Cependant il est possible de démontrer par récurrence sur n qu'un polynôme de degré n admet *au plus* n racines.

2. La terminologie savante (à propos du théorème de D'Alembert-Gauss) s'énonce comme suit :

$\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Autrement dit, tout polynômes P à coefficients complexes peut se factoriser en produit de polynômes de degré 1 (nous dirons que P est *scindé* sur $\mathbb{C}$) :

$$P(z) = a_n(z - z_1) \dots (z - z_n).$$

avec a_n le coefficient dominant de P et $z_1, \dots, z_n$ les n racines de P (celles-ci ne sont pas forcément toutes distinctes). Observons en passant que $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos puisque le polynôme $P(x) = x^2 + 1$ n'admet aucune racine de $\mathbb{R}$ (ses racines $z_1 = i$ et $z_2 = -i$ sont des nombres imaginaires purs).

Comme cela a été abordé en classe de 1ère, il est possible d'obtenir un lien entre les coefficients d'un polynôme et ses racines.

Proposition 48 (Formules de Viète). *Soit $n \in \mathbb{N}_*$ et $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ un polynôme de degré n à coefficients réels (i.e. $a_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \{0; \dots; n\}$ et $a_n \neq 0$). Alors :*

- la somme de toutes ses racines vaut $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$.
- le produit de toutes ses racines vaut $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Remarque. Il se trouve que les formules de Viète sont plus nombreuses que cela. Celles exposées ci-dessus sont les plus utilisées.

Voyons ce que cela donne sur un exemple.

Exemple 8.2.3. Soient $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 1 - 2i$ les racines d'un polynôme unitaire P de degré 2. Puisque

$$z_1 + z_2 = 2 \quad ; \quad z_1 z_2 = z_1 \bar{z}_1 = 1^2 + 2^2 = 5$$

alors z_1 et z_2 sont les racines du polynôme

$$P(z) = z^2 - 2z + 5.$$

Exercices à traiter : 45, 46 page 35 ; 47 et 49 page 35 à la maison ; 51 page 35 ; 114 page 41 ; 125 page 42 (facultatif) ; 149 page 46 en DM.

