Chapitre 8

Temps d'attentes

Dans ce chapitre, nous allons étudier plusieurs types de variables aléatoires permettant de modéliser des temps d'attentes. La première d'entres-elles est une variable aléatoire discrète, les autres sont dites continues et mettent en jeu l'utilisation du calcul intégral vu dans le chapitre précédent.

8.1 Loi géométrique

Considérons une épreuve de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. Nous répétons ensuite, dans les mêmes conditions, cette épreuve jusqu'à obtenir le premier succès et nous désignons alors par X le rang de celui-ci.

Définition 8.1.1. *La variable aléatoire décrite ci-dessus prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et suit une loi géométrique de paramètre p ($X \sim G_e(p)$ en abrégé). Sa loi est donnée par*

$$\mathbb{P}(X = k) = p \times (1-p)^{k-1} \quad \textit{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

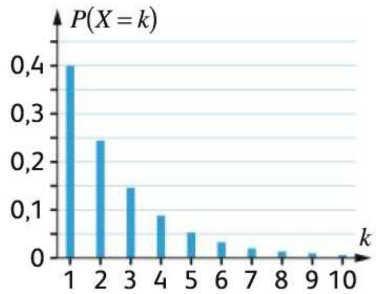

FIGURE 8.1: Représentation graphique d'une loi géométrique de paramètre $p = 0,4$

Remarque. Contrairement à une loi binomiale, le nombre de répétitions n'est pas fixé à l'avance. En étant « malchanceux » nous pourrions imaginer que le premier succès apparaissent après un grand nombre de répétition (pensez au gagnant du loto par exemple). Le caractère aléatoire n'est donc pas le nombre du succès (comme la loi binomiale) mais le nombre de répétitions nécessaire pour obtenir le premier succès.

Voyons sur un exemple.

Exemple 8.1.1. Un client cherche à joindre par téléphone l'assistance technique de son fournisseur internet. On estime que la probabilité que son appel soit pris sans attente est de $0,2$. Si son appel n'est pas pris directement, il est supposé que le client raccroche son téléphone et réitère l'opération jusqu'à joindre un technicien ; évidemment, les appels sont supposés indépendants les uns des autres. Soit T la variable aléatoire désignant le rang du premier appel pris sans attente.

L'épreuve de Bernoulli sous-jacente est définie par S : « l'appel du client est pris sans attente » de probabilité $\mathbb{P}(S) = 0,2$. Il est alors évident, d'après les données de l'énoncé, que T suit une loi géométrique de paramètre $p = 0,2$. Par suite,

$$\mathbb{P}(T=3) = 0,8^2 \times 0,2 = 0,128 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T>2) = 1 - P(T \geq 2) = 1 - \big(\mathbb{P}(T=1) + \mathbb{P}(T=2)\big) = 0,64.$$

Comme les autres lois de probabilités, la loi géométrique vérifie certaines propriétés particulières.

Proposition 25. *Soit X un variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ alors*

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}.$$

Exemple 8.1.2. En reprenant l'exemple précédent, nous obtenons $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{0,2} = 10$. Autrement dit, en moyenne, un client doit attendre 10 fois pour joindre l'assistance technique sans attente.

Les lois géométriques n'ont pas de mémoire.

Proposition 26 (Absence de mémoire)**.** *Soit X un variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ alors, pour tout entiers naturels non nuls m et n,*

$$\mathbb{P}(X > m+n | X > m) = \mathbb{P}(X > n)$$

Voyons sur un exemple.

Exemple 8.1.3. Toujours dans le même contexte, d'après la proposition précédente, nous savons que

$$\mathbb{P}(T > 2+2 | T > 2) = \mathbb{P}(T > 2) = 0,64.$$

Autrement dit, la probabilité que le client attente 4 minutes alors qu'il a déjà patienté 2 minutes est la même que la probabilité d'attendre 2 minutes ; la variable T a « oublié » qu'elle avait déjà patienté 2 minutes.

Exercices à traiter : 41page 242 ; 58 et 61 page 242.

8.2 Loi à densité

Jusqu'ici, nous avons principalement rencontré les lois de probabilités : loi de Bernoulli, loi uniforme sur un ensemble discret (équiprobabilité), loi binomiale, loi géométrique. Toutes ces lois sont dites **discrètes** (il est possible d'énumérer, à l'aide d'entiers, les valeurs prises par ces variables aléatoires). Nous allons à présent étudier des choses un peu plus complexe. Débutons par un exemple.

Rappelons que si $X \sim B(5; 0,25)$ (i.e. la variable X suit une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0,25$), cela signifie que X compte le nombre de succès obtenus sur 5 répétitions (de la même épreuve de Bernoulli). Autrement dit, les seules valeurs pouvant être prise par X sont les suivantes :

$$0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5.$$

Comment pourrions nous faire si nous avions une variables aléatoire qui puisse prendre un nombre infini de valeurs ?

Exemple 8.2.1. Imaginons que X désigne le temps d'attente à une station de métro de Lille. Nous pouvons supposer que X est une valeur (aléatoire) comprise entre 0 minutes (le métro est là lorsque nous arrivons sur le quai) jusqu'à 5 min (nous attendons durant 5 minutes sur le quai avant de monter dans le métro).

Comment faire pour calculer la probabilité d'attendre 1 minute ? Autrement dit, que vaut $\mathbb{P}(X = 1)$? Nous serions tenter d'utiliser le même type de raisonnement que lorsque nous avions manipulé un dé (nombre de cas favorables/nombre de cas total). Malheureusement, il y a une infinité de possibilités ici (attendre 1 min, $1,05$ minute, $2,0456$ minutes,...) puisque l'intervalle $[0; 5]$ contient une infinité de nombres ; nous obtenons donc que

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

ce qui est un peu ennuyeux.

Pour résoudre ce problème, nous allons plutôt regarder des évènements « plus grand ». Par exemple, quelle est la probabilité d'attendre entre 1 et 2 minutes le métro (i.e. $\mathbb{P}(1 \leqslant X \leqslant 2)$) ? Pour calculer la probabilité associée à ce genre d'évènement, nous allons utiliser des fonctions et des intégrales. Plus précisément, nous allons voir que de nombreux aléas peuvent être modélisés par une fonction f. Cette fonction porte le nom de **densité de probabilité** [1] et nous aurons le résultat suivant :

$$\mathbb{P}(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)dx.$$

Grâce au chapitre précédent (calcul intégral), nous allons donc pouvoir calculer l'aire sous la courbe C_f entre les points c et d et affirmer que ce nombre correspond à la probabilité désirée (le véritable argument justifiant ceci est trop complexe pour être développé en terminale).

Remarque. Dans un tel cadre, il est également possible de définir les quantités suivantes :

1. Si X est à valeurs dans un intervalle $[a; b]$, sa fonction de densité f vérifie $\int_a^b f(x)dx = 1$. En fait, toutes fonctions dont l'intégrale sur un intervalle vaut 1 est la densité de probabilité d'une variable aléatoire.

- **la fonction de répartition** associée à la variable X de densité f est donnée par

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_a^t fx)dx \quad \text{pour tout} \quad t \in [a;b] \quad ; \quad F(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \notin [a;b].$$

- **L'espérance** de X est le réel défini par

$$\mathbb{E}[X] = \int_a^b xf(x)dx.$$

- **La variance** de X est le réel (positif) défini par

$$\text{Var}(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2$$

et, comme auparavant, **l'écart-type** vaut $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Voici un exemple illustrant ceci.

Exemple 8.2.2. La fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est une densité de probabilité puisque $\int_0^1 f(x)dx = [x^2]_0^1 = 1$. Soit X la variable aléatoire associée. Sa fonction de répartition est donnée par

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^t 2xdx = [x^2]_0^t = t^2 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0;1] \quad ; \quad F(t) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Nous avons aussi

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 xf(x)dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

et puisque $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \left[\frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$, nous en déduisons que

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Exercices à traiter : 44 page 242 et 46 page 243.

Au cours de ce chapitre, nous allons étudier différents type de variables aléatoires grâce aux densités de probabilités associées. Ces variables aléatoires modélisent de manière pertinente un phénomène précis. Débutons par la loi uniforme.

8.3 Loi uniforme

La loi uniforme $\mathcal{U}[a;b]$ modélise parfaitement **un temps d'attente compris entre deux valeurs** a **et** b (sans tenir compte du sens, nous supposerons que $a, b \in \mathbb{R}$).

Proposition 27. *Si* X *suit une loi uniforme sur l'intervalle* $[a;b]$ *(en abrégé* $X \sim \mathcal{U}[a;b]$*) alors*

$$\mathbb{P}(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{1}{b-a}\int_c^d 1dx$$

pour tout intervalle $[c;d] \subset [a;b]$.

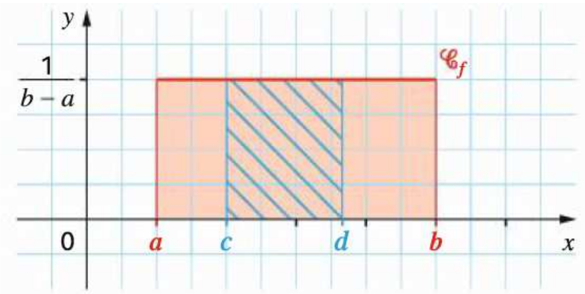

FIGURE 8.2: Loi uniforme sur un intervalle $[a;b]$

Remarque. 1. Notons le fait suivant : si $X \sim \mathcal{U}[a;b]$ alors $\mathbb{P}(X \notin [a;b]) = 0$.

2. La fonction de répartition est donnée par

$$F(t) = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a} & \text{si} \quad t \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Dans ce choix de modélisation, aucune portion de l'intervalle $[a;b]$ est privilégiée : d'où l'appellation *loi uniforme*.

Voyons sur un exemple.

Exemple 8.3.1. Si $X \sim \mathcal{U}[1;4]$ alors

$$\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{1}{4-1}\int_2^3 1dx = \frac{1}{3}(3-2) = \frac{1}{3}.$$

Implicitement, nous avons utiliser le fait que $F(x) = x$ est une primitive de $f(x) = 1$ et avons calculé la différence de la fonction F évaluée en $x = 3$ et $x = 2$.

Comme pour la loi binomiale, il est possible de calculer des paramètres associés à une variable aléatoire uniforme. Nous allons nous concentrer sur l'espérance et la notion de variance.

Proposition 28. *Soit* $X \sim \mathcal{U}[a;b]$ *alors*

- *son espérance vaut* $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$

- *sa variance vaut* $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- *son écart type* $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Remarque. 1. Les résultats obtenus plus haut sont obtenus en calculant des intégrales. Par exemple, dans notre contexte,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx.$$

Exercices à traiter : 51 page 243 ; 53 (Q3 et Q4) page 243 ; 66, 67 page 246.

8.4 Loi exponentielle

La loi exponentielle est pertinente lorsque nous souhaitons modéliser certains évènements aléatoires. Par exemple, elle intervient lorsque nous nous intéressons à la durée de vie d'un matériel électronique. Elle apparaît également en radioactivité : la durée de vie d'un élément radioactif suit une loi exponentielle. Elle est également présente dans la modélisation des files d'attentes.

Définition 8.4.1. *Une variable aléatoire X suit une* ***loi exponentielle*** *de paramètre $\lambda > 0$ (en abrégé, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$) si elle admet pour densité de probabilité la fonction $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour tout $x \geq 0$; $f(x) = 0$ sinon. En particulier,*

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx \quad \textit{pour tout} \quad 0 \leq a < b.$$

Remarque. 1. En traçant le graphique de la densité f, nous constatons que l'aire sous la courbe diminue fortement lorsque x devient grand. Cela signifie que la probabilité que X prenne des grandes valeurs est très faible.

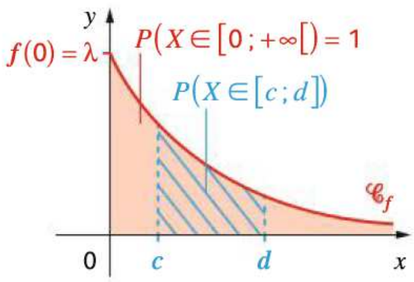

FIGURE 8.3: Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

2. Observons que $t \mapsto -e^{-\lambda t}$ (avec $t \geq 0$) est une primitive de f. Par suite,

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est la fonction de répartition associée.

Exemple 8.4.1. Soit $X \sim \mathcal{E}(0,02)$ alors

$$\mathbb{P}(20 \leq X \leq 50) = \int_{20}^{50} 0,02e^{-0,02x}dx = [-e^{-0,02x}]_{20}^{50} = e^{-0,4} - e^{-1} \approx 0,302.$$

et

$$\mathbb{P}(X \leq 100) = \int_{0}^{100} 0,02e^{-0,02x}dx = [-e^{-0,02x}]_{0}^{100} = 1 - e^{-2} \approx 0,865.$$

Notons que X ne prend que des valeurs positives.

A nouveau, il est possible de calculer espérance et l'écart-type d'une loi exponentielle.

Proposition 29. *Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ alors*
- *son espérance vaut $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$.*
- *son écart-type vaut $\sigma[X] = \frac{1}{\lambda}$.*

Tout comme la loi géométrique, la loi exponentielle possède également une propriété d'absence de mémoire.

Proposition 30 (absence de mémoire)**.** *Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors, pour tout réels positifs t et h,*

$$\mathbb{P}(X \geq t + h | X \geq t) = \mathbb{P}(X \geq h).$$

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 8.4.2. Nous supposons que la durée de vie (en année) d'une ampoule suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02$ alors

$$\mathbb{P}(T > 1 + 2 | T > 1) = \mathbb{P}(T > 2) = e^{-2\times 0,02}$$

Autrement dit, la probabilité qu'une ampoule dure 3 ans alors qu'elle a déjà vécu 1 an est la même que la probabilité qu'elle dure 2 ans ; la variable T a « oublié » qu'elle avait déjà vécu 1 an.

Exercices à traiter : 49 page 243 ; 56, 57 page 244 ; 72 page 247 ; 79 page 251 (en DM).