Chapitre 9

Equations différentielles et limites

Dans ce chapitre il est essentiel de maitriser le calcul de primitives et de dérivées des fonctions usuelles.

9.1 Equations différentielles

La plupart du temps dans votre scolarité, vous avez cherché à **résoudre des équations polynomiales**. Par exemple, vous deviez mettre en oeuvre différentes méthodes pour résoudre (i.e. déterminer la valeur de x) des équations de la forme :

$$3x - 2 = 0 \quad ; \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0 \quad ; \quad \ldots$$

Ce genre de résolution a notamment permit de résoudre des problèmes géométriques, l'étude de la monotonie d'une fonction,.... Dans ce chapitre, nous allons aborder un autre genre d'équation. Cette fois-ci l'inconnu n'est plus un nombre réel x mais **une fonction** f vérifiant une équation impliquant sa dérivée. Voyons sur un exemple.

Exemple 9.1.1. Supposons que $f(t)$ désigne la quantité (en mL) d'un médicament présent dans le sang d'un patient à l'instant $t \geq 0$. Une étude du processus d'élimination de médicament permet de montrer que la vitesse d'élimination $f'(t)$ est proportionnelle à la quantité présente dans le sang (pour un rapport de -10%). Autrement dit, f vérifie la relation

$$(E) \;:\; f'(t) = -0,1 \times f(t) \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0.$$

La relation précédente est désignée sous le nom **d'équation différentielle**.

Pour la résoudre nous devons **trouver toutes les fonctions f définies sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ qui vérifient la relation (E).** Parfois, **une condition initiale** sera également imposée (par exemple, il y a $0,3mL$ du médicament dans le sang du patient à l'instant $t = 0$) ; une équation différentielle associée à une condition initiale est désignée sous l'appellation de *problème de Cauchy*. Dans ce cas, nous chercherons à déterminer (si elle existe) l'unique solution de l'équation différentielle (E).

Les équations différentielles sont nombreuses, variées, de complexités différentes et apparaissent naturellement dans différentes domaines (biologie, physique quantique, thermodynamique, économie,...). Leur résolution est parfois complexe (la plupart du temps il n'existe pas encore de méthodes de résolutions complètes) et repose souvent sur des outils mathématiques dépassant de loin le programme du lycée. Modestement, nous allons étudier certains cas particuliers bien compris des mathématiciens. Débutons donc notre étude des équations différentielles.

9.1.1 Equation différentielle $y' = ay$

Problème : résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_1) \ : \quad y' = ay \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, nous cherchons l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f'(t) = af(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Théorème 31. *Les solutions de (E_1) sont de la forme $f(t) = Ce^{at}$ avec $C \in \mathbb{R}$.*

Remarque. Il y a donc une infinité de solutions (chaque valeur de C donne une nouvelle solution).

Voyons sur un exemple.

Exemple 9.1.2. Résolvons sur $I = \mathbb{R}$ l'équation

$$(E_1) \ : \quad y' = -\frac{3}{2}y.$$

D'après le théorème précédent, les solutions sont de la forme $f(t) = Ce^{-\frac{3}{2}t}$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$) avec $C \in \mathbb{R}$. Voici quelques courbes représentatives de solutions (suivant différentes valeurs de C)

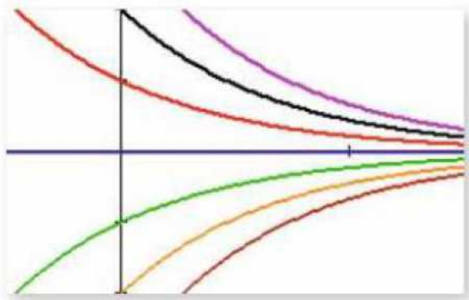

Figure 9.1: Représentations graphiques de solutions de (E_1)

Si jamais l'énoncé impose une condition « initiale », cela nous force à choisir une valeur particulière de C. Par exemple, si la courbe C_f d'une solution doit passer par le point $A(2;1)$ cela signifie que f doit aussi vérifier

$$f(2) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad Ce^{-\frac{3}{2}\times 2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad C = e^3.$$

L'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{3}{2}y & \text{(équation différentielle)} \\ y(2) = 1 & \text{(condition initiale).} \end{cases}$$

est $f(t) = e^3 \times e^{-\frac{3}{2}t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercices à traiter : 66, 69 page 84 ; 74 page 84.

9.1.2 Equation différentielle $y' = ay + b$

Problème : résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_2) \ : \quad y' = ay + b \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, nous cherchons l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f'(t) = af(t) + b$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cette fois-ci, la résolution se fait en deux temps :

1. d'abord, nous cherchons une solution f_h de l'équation différentielle homogène associée :

$$(E_h) \ : \ y' = ay$$

   à l'aide du théorème 31.
2. ensuite, nous cherchons une solution particulière de f_p de l'équation différentielle (E_2).

La combinaison de ces deux étapes fournit le théorème suivant.

Théorème 32. *En conservant les notations précédentes, les solutions de (E_2) sont de la forme $f(t) = f_h(t) + f_p(t)$. Plus précisément, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$f(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a} \quad \textit{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque.

1. Il est sous-entendu (en utilisant le théorème 31) que les solutions de l'équation homogène (E_h) sont de la forme, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_h(t) = Ce^{at} \quad \text{pour tout} \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

   et que

$$f_p(t) = -\frac{b}{a} \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}$$

   est une solution particulière de (E_2).
2. A nouveau, (E_2) admet une infinité de solutions (pour chaque choix de C). Comme auparavant, si une condition initiale est imposée, il existe une unique solution.

Voyons sur un exemple.

Exemple 9.1.3. Résolvons sur $I = \mathbb{R}$ l'équation

$$(E_2)\ :\quad 2y' + 3y = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad y' = -\frac{3}{2}y + 3.$$

D'après le théorème 32 (avec $a = -\frac{3}{2}$ et $b = 3$), les solutions sont de la forme

$$f(t) = Ce^{-\frac{3}{2}t} + 2 \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Voici quelques courbes représentatives de solutions (suivant différentes valeurs de C)

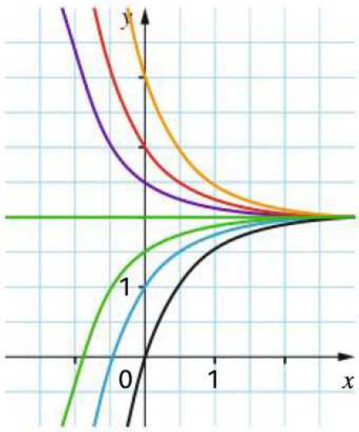

FIGURE 9.2: Représentations graphiques de solutions de (E_2)

Si jamais l'énoncé impose une condition « initiale », cela nous force à choisir une valeur particulière de C. Par exemple, si la courbe C_f d'une solution doit passer par le point $A(0;3)$ cela signifie que f doit aussi vérifier

$$f(0) = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad Ce^{-\frac{3}{2}\times 0} + 2 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad C + 2 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad C = 1.$$

L'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{3}{2}y + 2 \quad \text{(équation différentielle)} \\ y(0) = 3 \quad \text{(condition initiale).} \end{cases}$$

est donc $f(t) = e^{-\frac{3}{2}t} + 2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercices à traiter : 80, 82,84 page 84 ; 110 page 87.

9.2 Limite d'une fonction

Les solutions d'équations différentielles permettent de modéliser des problèmes issus de branches variées. Par exemple, la fonction $f(x) = 3e^{-2x}$ peut s'interpréter comme la solution d'un problème de décroissance radioactive modélisée par le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2y \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

Il est alors attendu que l'étude de cette solution permet d'obtenir des informations sur le problème initial. Il apparaît donc naturel de s'interroger, comme pour les suites, sur **le comportement de cette fonction lorsque x s'approche des bords du domaine de définition** (lorsque x tend vers $\pm\infty$ par exemple). Concernant les limites, la plupart des résultats valables pour des suites le sont encore pour des fonctions. D'ailleurs, l'approche initiée pour les suites avec l'utilisation de la calculatrice reste de mise à une différence près : nous n'allons pas uniquement faire tendre x vers $+\infty$. Bien entendu, il est possible d'étudier les limites d'une fonction sans forcément que celle-ci soit solution d'une équation différentielle.

9.2.1 Comportement en l'infini

Voyons à nouveau ce qui peut se produire lorsque $x \to \pm\infty$.

Définition 9.2.1. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$ avec $a > 0$ suffisamment grand.*

1. *Nous dirons que f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque $x \to +\infty$ lorsque les valeurs de $f(x)$ sont aussi proches de l que nous voulons dès lors que x est suffisamment grand. Nous noterons ceci par*
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$
2. *Nous dirons que f admet pour limite $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$ lorsque les valeurs de $f(x)$ sont aussi grandes que nous voulons dès lors que x est suffisamment grand. Nous noterons ceci par*
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Remarque. De manière similaire, nous pouvons définir les limites suivantes en adaptant les énoncés précédents :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l.$$

En pratique, pour déterminer la limite d'une fonction en l'infini, il suffit d'utiliser sa calculatrice pour observer les valeurs prises par $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus grand :

- si $f(x)$ semble se rapprocher d'une valeur l nous sommes dans le premier cas ;
- si au contraire les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en grandes cela signifie que $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ (en fonction du signe).

Voyons ce que donne cette définition graphiquement.

Exemple 9.2.1. 1. Peu importe la taille de la boite centrée en l (sur l'axe des ordonnées), il est possible de trouver un nombre suffisamment grand (B sur l'axe des ordonnées) de sorte que toutes les valeurs de $f(x)$ soient coincées dans la boite centrée en l à partir de B.

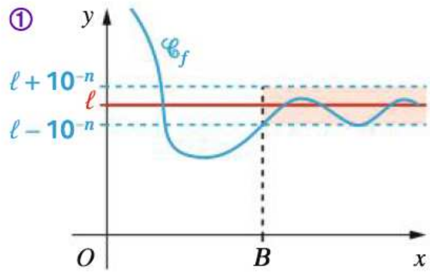

FIGURE 9.3: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

2. Peu importe le seuil choisi (sur l'axe des ordonnées), il est toujours possible de trouver un nombre B suffisamment grand (sur l'axe des abscisses) de sorte que toutes les valeurs de $f(x)$ dépasse ce seuil à partir de ce point.

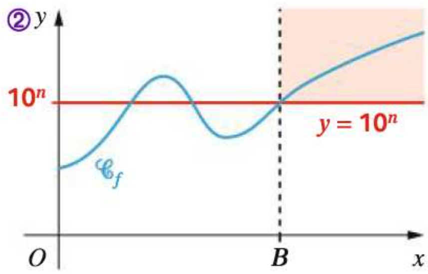

FIGURE 9.4: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

Exercices à traiter : 43, 44 page 82.

Pour mieux comprendre cette nouvelle notion, il est important d'avoir en tête le comportement en l'infini des fonctions usuelles.

Proposition 33. *Les limites suivantes sont satisfaites :*

- $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Remarque. Il convient de conserver en tête les règles de calculs sur les limites qui ont été d'abord été présentées pour les suites (addition, multiplication, soustraction, quotient, comparaison,...) Comme nous allons le voir sur des exemples, tout se passe pour le mieux. Toutefois, il faut se souvenir des formes indéterminées qui ne peuvent être levées sans travail supplémentaire, elles sont de la forme

$$\frac{0}{0} \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \infty - \infty \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Voyons quelques exemples.

Exemple 9.2.2. 1. Déterminons $\lim_{x\to+\infty}(3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, nous en déduisons que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Pour les mêmes raisons, $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$. Par suite, nous avons donc

$$\lim_{x\to+\infty}(3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to+\infty} 3 + \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 3.$$

Ce résultat était déjà pressenti grâce à la calculatrice.

2. Déterminons la limite de $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ lorsque $x \to -\infty$. Il n'est pas difficile d'étudier séparément numérateur et dénominateur :

$$\lim_{x\to-\infty} 2x - 1 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty.$$

Nous obtenons ainsi une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Pour lever cette indétermination, il faut **factoriser au numérateur et au dénominateur par le terme dominant** afin de comparer ces deux infinis (voir s'ils sont de « même taille » ou si l'un des deux est « plus grand que l'autre »). Il est possible de montrer que

$$f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Etudions à nouveau les limites du numérateur et du dénominateur, nous trouvons

$$\lim_{x\to-\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1.$$

En conséquence, les infinis sont de « même taille » et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2}{1}$ comme nous aurions pu le conjecturer à l'aide d'une calculatrice.

Exercices à traiter : 46 à 50 page 82.

Voyons un nouvel exemple. Dans celui-ci, la limite nous donne des informations sur le problème physique modélisé par la fonction.

Exemple 9.2.3. Imaginons que nous avons obtenu une fonction $t \mapsto L(t)$ (exprimée en mm) qui modélise la taille d'une crevette en fonction de son âge t (exprimé en semaines). Cette fonction est définie par

$$L(t) = 87,5(1 - e^{-0,12t}) \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0.$$

Etudions sa limite en l'infini. Nous savons que $\lim_{t\to+\infty} e^{0,12t} = +\infty$ en conséquence,

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-0,12t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^{0,12t}} = 0.$$

Par suite, $\lim_{t\to+\infty} L(t) = 87,5(1-0)$. Nous pouvons alors en conclure que la taille maximale d'une crevette ne pourras jamais excéder $87,5\,mm$ (sans forcément l'atteindre un jour).

Exercice à traiter : 93, 94 page 85.

L'exemple précédent met en lumière le fait qu'une fonction puisse s'approcher de plus en plus (sans l'atteindre) d'une valeur limite. Le nom savant correspondant est celui d'*asymptote*.

Définition 9.2.2. *Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (ou $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$). Nous dirons que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f en $+\infty$ (ou $-\infty$).*

Remarque. Plus grossièrement, cela signifie que la droite $y = l$ fait office de barrière attractive infranchissable : la courbe s'en rapproche de plus en plus sans jamais l'atteindre.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 9.2.4. La fonction $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2-x}{1-x}$ admet $y = 1$ pour **asymptote horizontale** en $\pm\infty$ puisque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. Graphiquement, cela est représentée par la droite en rouge sur le graphique ci-dessous

9.2.2 Limite d'une fonction en un nombre réel

Contrairement aux suites, nous n'avons pas à nous limiter à regarder ce qu'il se produit lorsque $x \to \pm\infty$, nous pouvons aussi étudier le comportement d'une fonction lorsque celle-ci s'approche d'une valeur interdite par exemple.

Définition 9.2.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I dont a est une borne ($I =]a;+\infty[$ par exemple). Nous dirons que f admet $+\infty$ comme limite en a lorsque les valeurs de $f(x)$ sont aussi grande que nous le souhaitons dès que x est suffisamment proche de a. Nous noterons ceci par*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

Remarque. 1. Nous pouvons définir de manière similaire $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

2. Si f est **continue en** a, les choses sont bien plus simples car dans ce cas

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Nous avons déjà rencontré un exemple de ce genre.

Exemple 9.2.5. La fonction $x \mapsto \ln x$ est définie sur l'intervalle ouvert $]0;+\infty[$ et nous avons déjà vu que $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

Parfois la fonction est définie de part et d'autres d'un point a mais pas en a. Cela pousse a étudier les limites lorsque x se rapproche de par **valeurs descendantes** (nous noterons ceci par $x \to a^+$) ou par **valeur ascendantes** (ceci sera noté $x \to a^-$). L'exemple phare est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui n'est pas définie en 0 dont la limite change suivant qu'on s'approche de 0 par valeurs ascendantes ou descendantes.

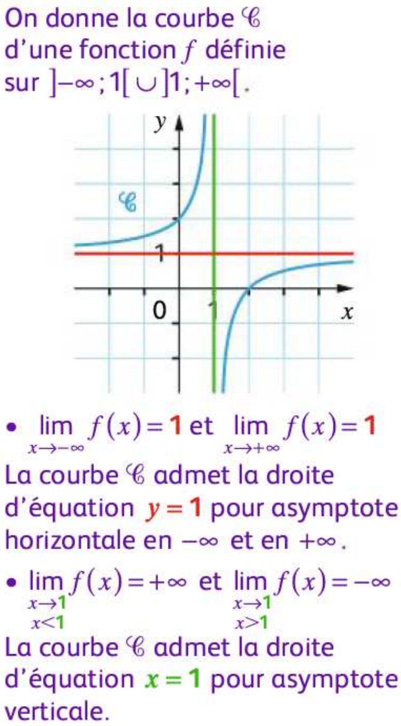

FIGURE 9.5: Asymptote verticale et horizontale

Proposition 34. *Les limites suivantes sont satisfaites :*

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Ceci mène à la notion d'asymptote verticale.

Définition 9.2.4. *Lorsque* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *(ou* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$*), nous dirons que la droite d'équation* $x = a$ *est une* ***asymptote verticale*** *à la courbe* C_f*.*

Remarque. A nouveau, cela signifie que la droite $x = a$ fait office de barrière attractive infranchissable : la courbe s'en rapproche de plus en plus sans jamais l'atteindre. Nous avons déjà observé cela sur l'exemple 9.2.4 avec la droite verte d'équation $x = 1$.

Traitons un dernier exemple pour conclure ce chapitre.

Exemple 9.2.6. Déterminons la limite $f(x) = 3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ lorsque $x \to 0^+$. Naïvement, nous pouvons essayer de déterminer la limite de chaque terme pour ensuite les additionner. Or,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{2}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Nous faisons alors face à une forme indéterminée $\infty - \infty$. Pour la lever, il suffit de mettre la fonction sous un unique dénominateur :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x} = (3x^2 + 2x - 1) \times \frac{1}{x^2}.$$

Dans ce cas, il est simple d'observer que $\lim_{x\to 0^+}(3x^2+2x-1) = -1$ puisque la fonction est continue en 0 tandis que $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -1 \times (+\infty) = -\infty.$$

Exercices à traiter : 51 et 52 page 84 ; 89 page 85 ; 115 page 88.