Chapitre 9

Variations d'une fonction

9.1 Introduction

Nous avons abordé de nombreuses notions liées aux fonctions :

- Calculer l'image d'un point par une fonction, déterminer un antécédent.
- Déterminer le signe d'une fonction et résoudre des inéquations impliquant une fonction.
- En particulier, ces aspects ont été étudiés sur les fonctions affines (i.e. des fonctions de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$).

Nous allons à présent aborder la notion de **monotonie et d'extremum**. Il s'agit de déterminer à quel moment une fonction **augmente** (ou **diminue**) en fonction de x, de repérer les **maximums ou minimums** (s'ils existent). Il sera important d'obtenir une notation synthétique pour résumer tout ceci, voyons cela au travers d'un exemple.

Exemple 9.1.1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dont le graphe est donné ci-dessous.

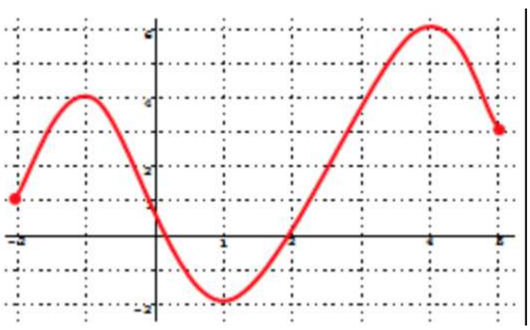


FIGURE 9.1: Graphe d'une fonction f

Ce graphique peut se résumer grâce au tableau suivant :

x	-2		-1		1		4		5
$f(x)$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6	$\searrow$	3

Le tableau précédent est appelé **un tableau de variations**, voici les informations qu'il contient :

- **L'intervalle d'étude** (parfois appelé à tort *domaine de définition*) est lu dans la première ligne : $[-2; 5]$,
- En lisant le tableau en colonne, les **images** de certaines valeurs sont connues : $f(-2) = 1$, $f(4) = 6, \ldots$.
- Là où les **flèches** pointent vers le haut, la fonction est dite **croissante**. Par exemple, f est croissante sur l'intervalle $[1; 4]$ (i.e. les valeurs de $f(x)$ augmentent quand x augmente de 1 à 4).
- De manière similaire, là où les flèches pointent vers le bas, la fonction est **décroissante**. Par exemple, f est décroissante sur l'intervalle $[-1; 1]$ (i.e. les valeurs de $f(x)$ diminuent quand x augmente de -1 à 1
- Le tableau permet **d'obtenir des encadrements** : si $x \in [4; 5]$ alors, d'après la deuxième ligne, $3 \leq f(x) \leq 6$.

Définissons de manière formelle la notion de fonction croissante et décroissante introduite ci-dessus.

9.1.1 Sens de variation

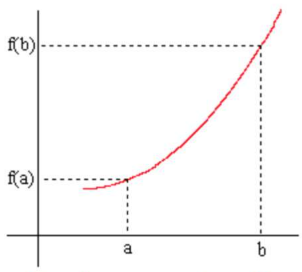
Dire qu'une fonction est **croissante**, sur un intervalle I, revient à dire que lorsque la valeur de x augmente dans l'intervalle I la valeur de $f(x)$ **augmente** également.

Définition 9.1.1. *La fonction est dite **croissante** sur l'intervalle I si, pour tous réels $a \leq b$ alors*

$$f(a) \leq f(b).$$

*Une fonction **croissante préserve l'ordre** : c'est-à-dire, les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans le même ordre.*

Remarque. Une fonction est dite **strictement croissante** si $a \leq b$ entraine que $f(a) < f(b)$.



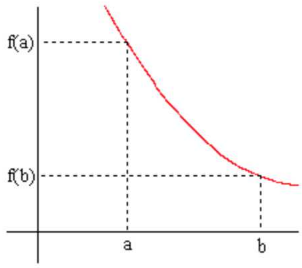
Fonction croissante sur I

Exemple 9.1.2.
- En reprenant l'exemple de l'introduction, nous observons que f est **croissante** sur les intervalles $[-2;-1]$ et $[1;4]$.
- Le tableau de variation de l'introduction permet aussi d'obtenir la comparaison suivante : puisque $2 \leq 3$ alors
$$f(2) \leq f(3)$$
comme f est **croissante** sur $[1;4]$.

De manière analogue, une fonction est **décroissante** sur un intervalle I lorsque la valeur de l'image $f(x)$ **diminue** lorsque x augmente dans l'intervalle I.

Définition 9.1.2. *La fonction est dite **décroissante** sur l'intervalle I si, pour tous réels $a \leq b$ alors*
$$f(a) \geq f(b).$$
Une fonction décroissante renverse l'ordre : c'est-à-dire, les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans un ordre contraire.

Remarque. Une fonction est dite **strictement décroissante** si $a \leq b$ entraine que $f(a) > f(b)$.



Fonction décroissante sur I

Exemple 9.1.3.
- En reprenant l'exemple de l'introduction, nous observons que f est **décroissante** sur les intervalles $[-1;1]$ et $[4;5]$.
- En particulier, le tableau de variation permet d'obtenir la comparaison suivante : puisque $0 \leq 1$ alors
$$f(1) \leq f(0)$$
comme f est **décroissante** sur $[-1;1]$.

En résumé, il est donc important de savoir **dresser un tableau de variation** à partir d'un graphique ou d'une série d'informations. Il faut aussi être capable de **comparer l'image de réels** à partir des variations. Il faut également être capable de **dessiner le graphique** d'une fonction à partir de son **tableau de variation**.

Rappels : le tutoriel suivant explique comment afficher une courbe (sur une calculatrice TI).

https://www.youtube.com/watch?v=aDTy88WAGg8&list=PLVUDmbpupCapZdNo8QaVDkWz3eqneIYK1&index=9&t=1s

Exercices à traiter : 16,18 page 240 + (20 page 240 à la maison) ; 23,24 page 240 + (25 page 241 à la maison) ; 31 page 241.

9.1.2 Extremum

Il est parfois utile de déterminer, lorsqu'elles existent, la plus grande ou la plus petite valeur atteinte par une fonction f donnée.

Définition 9.1.3. *1. Le* ***maximum*** *d'une fonction f sur un intervalle I est, s'il existe,* ***la plus grande valeur*** *possible* ***des images****, atteinte pour un réel $b \in I$. Ainsi, pour tout réel $x \in I$ nous avons*

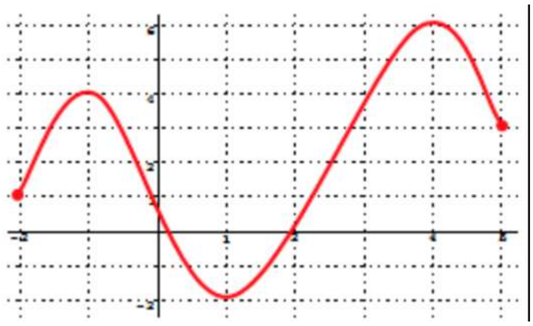
$$f(x) \leq f(b).$$

2. Le ***minimum*** *d'une fonction f sur un intervalle I est, s'il existe, la* ***plus petite valeur*** *possible* ***des images****, atteinte pour un réel $a \in I$. Ainsi, pour tout réel $x \in I$ nous avons*

$$f(a) \leq f(x).$$

Remarque. Le mot **extremum désigne** sans distinction le **minimum** ou le **maximum** d'une fonction.

Exemple 9.1.4. Reprenons la courbe donnée en introduction.



1. Sur l'exemple ci-dessus, observons que sur $[-2; 5]$ le **maximum** est atteint en $x = 4$ et vaut $f(4) = 6$.
2. Tandis que sur l'intervalle $[-2; 2]$, le **maximum** est atteint en $x = -1$ et vaut $f(-1) = 4$.
3. Le **minimum** sur $[-2; 6]$ est atteint en $x = 1$ et vaut $f(1) = -2$.

Comme l'exemple précédent le montre, il est important de **préciser l'intervalle d'étude**.

Exercices à traiter : 29,32 page 241 (33 page 241 à la maison) ; 45, 47 page 242 (46 page 242 à la maison).

9.2 Etude de cas particulier

9.2.1 Fonctions affines et sens de variations

Revenons sur le cas particuliers des fonctions affines et étudions les variations de ce genre de fonctions.

Rappels :

- $f(x) = ax + b$ est une fonction affine.
- Lorsque l'ordonnée à l'origine est nulle (i.e. $b = 0$) nous retrouvons le cas des fonctions linéaires
- le coefficient a est le **coefficient directeur**. Nous avons déjà observé que ce nombre déterminant l'inclinaison de la droite représentative de C_f ainsi que le signe de f.

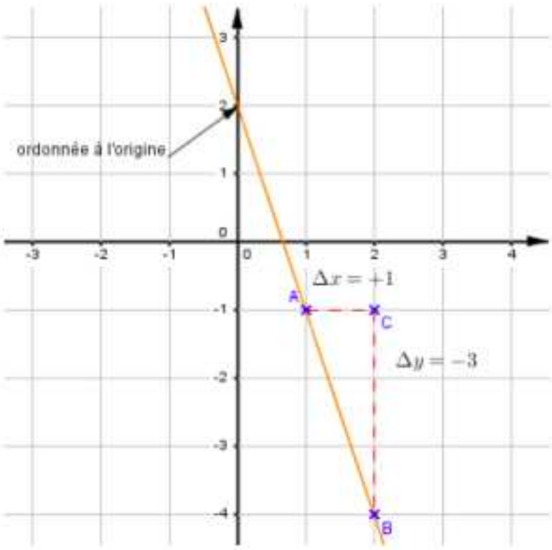


FIGURE 9.2: Représentation de $f(x) = -3x + 2$

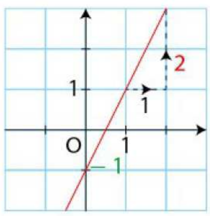
Voyons comment **caractériser les variations d'une fonction affine**.

Théorème 23. *Soit $f(x) = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$. Alors*

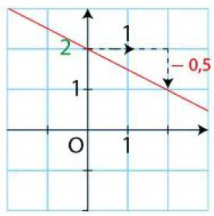
1. *Si $a > 0$, la fonction affine est **croissante** sur $\mathbb{R}$.*
2. *Si $a < 0$, la fonction affine est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.*

Remarque. Graphiquement, si $a > 0$ la droite pointe vers le « haut » du repère tandis que si $a < 0$ elle pointe vers le « bas » du repère.

Représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto 2x - 1$ dans un repère.



Représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto -0{,}5x + 2$ dans un repère.



Démonstration. Montrons le premier point, la deuxième assertion est laissée en exercice.

Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telle que $a > 0$. Soient x et y deux réels tels que $x \leq y$, montrons alors que $f(x) \leq f(y)$.

Le point essentielle de la démonstration est que la multiplication d'une inégalité par un nombre strictement positif ne change pas le sens de celle-ci ; l'ajout d'un nombre réel dans chaque membre non plus.

$$x \leq y \iff ax \leq ay \iff ax + b \leq ay + b \iff f(x) \leq f(y).$$

□

Exemple 9.2.1. La fonction $g(x) = -4x + 12$ est décroissante. En effet, soient $x \leq y$. Nous avons alors

$$x \leq y \iff -4x \geq -4y \iff -4x + 12 \geq -4y + 12 \iff f(x) \geq f(y).$$

Exercices à traiter : 38 et 41 page 242.

Voici maintenant un résultat permettant de trouver par le calcul **la valeur du coefficient directeur** a à partir de deux points A et B se trouvant sur C_f.

Proposition 24. *Soit $f(x) = ax + b$ et deux points $A = (x_A; f(x_A))$ et $B = (x_B; f(x_B))$. Le coefficient directeur vaut*

$$a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}.$$

Remarque.

1. Le choix des points A et B est laissé libre, il convient de choisir ceux qui fournissent les calculs les plus simples possibles.
2. Une autre manière de formuler le résultat précédent est d'observer que la courbe représentative est une droite $\mathcal{D}$. Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points de cette droite alors

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 9.2.2. Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine telle que $f(2) = 6$ et $f(4) = 12$ (i.e $A(2; 6)$ et $B(4; 12)$ sont sur la courbe C_f).

1. Déterminons la valeur de a :

$$a = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{12 - 6}{4 - 2} = 3$$

   donc $f(x) = 3x + b$.

2. Déterminons la valeur de b. D'après ce qui précède, nous savons que $f(2) = 3 \times 2 + b$. Or, d'après l'énoncé $f(2) = 6$. Nous obtenons alors l'équation

$$3 \times 2 + b = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad b = 0.$$

   En conclusion, $f(x) = 3x$.

Exercice à traiter : Déterminer l'expression des fonctions affines de l'exercice 40 page 242 (question à faire à la maison).

9.2.2 Polynôme de degré 2 et extremum

Dans cette section, nous allons voir ce qu'il est possible de dire à propos de fonctions de la forme

$$ax^2 + bx + c \quad \text{avec} \quad a \neq 0, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

La calculatrice est de nouveau utile pour déterminer, de manière approximative, les extremums. Le tutoriel suivant explique comment procéder :

https://www.youtube.com/watch?v=T0PvRYJZK6I&list=PLVUDmbpupCapZdNo8QaVDkWz3eqneIYK1&index=11.
Voyons un exemple d'étude de fonction.

Exemple 9.2.3. Etudions la fonction $h(x) = x^2 - 2x + \frac{7}{4}$.

1. Traçons la fonction sur l'intervalle $X_{\min} = -5$, $X_{\max} = 5$, $Y_{\min} = -1$ et $Y_{\max} = 10$.
2. La fonction *minimum* de la calculatrice nous dit que le minimum vaut $0,75$ et est atteint pour $x = 1,000008$.
3. Vérifions ceci par le calcul :
   (a) Il n'est pas difficile de calculer $h(1) = \frac{3}{4}$.
   (b) On peut aussi vérifier (en développant le membre de gauche pour retrouver l'expression de $h(x)$) que $h(x) = (x - 1)^2 + \frac{3}{4}$.
   (c) Pour montrer que $h(1)$ est un minimum, il suffit de montrer que, pour tout $x \in [-5; 5]$,

$$h(x) \geq h(1) \quad \Longleftrightarrow \quad h(x) - h(1) \geq 0.$$

   Or, d'après ce qui précède, $h(x) - h(1) = (x - 1)^2$. En outre, $(x - 1)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc

$$h(x) - h(1) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h(x) \geq h(1) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, nous avons bien montré que $h(1) = \frac{3}{4}$ est un **minimum** atteint en $x = 1$. Les informations transmises par la calculatrice n'étaient pas exactes.

Exercices à traiter : 72 page 247, 83 page 249 87 page 249.

9.3 Bilan du chapitre

Voici les compétences à maitriser dans ce chapitre.

- Savoir lire et établir une représentation graphique d'une fonction.
- Savoir lire et établir le tableau de variations d'une fonction (notion de fonction croissante, décroissante, ...).
- Savoir déterminer les extremums d'une fonction à l'aide d'un tableau de variations ou d'une représentation graphique.
- Connaitre les représentations graphiques des fonctions affines et savoir déterminer sa monotonie en fonction du coefficient directeur. Savoir déterminer la valeur de a et de b.
- Utilisation de la calculatrice : tracer une fonction, tableau de valeur, déterminer les extremums, trouver les points d'intersection avec une droite.
- Justifier par le calcul qu'une valeur est un maximum ou un minimum.