Chapitre 5

Calcul littéral (2ème partie)

Maintenant que nous avons vu comment résoudre graphiquement des inéquations, voyons comment faire algébriquement.Ajouter une histoire de catapulte : comment savoir où le projectile tombe + difficulté résolution équation.

5.1 Résolutions d'inéquations

Les inéquations surviennent assez facilement dans la modélisation de certains problèmes. Par exemple, imaginons que Lola souhaite se rendre dans une salle de sport. Le responsable de la salle lui propose deux abonnements :

- l'un d'entre eux coûte 312 euros à l'inscription puis 3 euros la séance ;
- l'autre coûte 216 euros à l'inscription puis 5 euros la séance.

Pour savoir au bout de combien de séances le premier abonnement est le plus avantageux que le second, Lola cherche à mettre son problème en équation. Si x désigne le nombre de séances, elle obtient

$$312 + 3x < 216 + 5x$$

Nous allons à présent voir comment résoudre ce type de problème.

Définition 5.1.1. *Résoudre une inéquation dans un ensemble de réels $I \subset \mathbb{R}$, c'est trouver* ***tous les éléments*** *de I qui vérifient l'inégalité donnée.*

Exemple 5.1.1.
1. 3 est solution de l'inéquation $2x - 5 > 0$ car $2 \times 3 - 5 = 1 > 0$.
2. -2 n'est pas solution de l'inéquation $2x - 5 > 0$ car $2 \times (-2) - 5 = -9 < 0$.

Dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des solutions de $2x - 5 > 0$ est l'intervalle $]\frac{5}{2}; +\infty[$ car

$$2x - 5 > 0 \quad \iff x > \frac{5}{2}$$

Voyons plutôt quels moyens ont été mis en oeuvre pour résoudre l'inéquation précédente.

5.2 Outils pour la résolution algébrique d'inéquations

Règles pour résoudre une inéquation

Les propriétés suivantes décrivent les opérations qu'il est possible d'effectuer sur une inéquation.

Propriétés 1.

1. **Ajouter ou soustraire** un même nombre à chaque membre d'une inégalité **ne change pas** le sens de celle-ci.
2. Si $a > 0$ alors **multiplier ou diviser** par a les deux membres d'une inégalité **ne change pas** le sens de celle-ci.
3. Si $a < 0$ alors **multiplier ou diviser** par a les deux membres d'une inégalité **change** le sens de celle-ci.

Exemple 5.2.1.

1. $2x - 5 > 0 \iff 2x > 5 \iff x > \frac{5}{2}$.
2. $4 - 3x < 0 \iff -3x < -4 \iff x > \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$.

Exercices à traiter : 39 page 97 et 50 page 98 ; résoudre $3x + 1 > x - 7$ et $x + 1 < -2x + 6$; résoudre 51 page 98 à la maison et 73 page 99 (rappel : l'aire $\mathcal{A}$ d'un trapèze est donnée par $\mathcal{A} = \frac{(b+B)\times h}{2}$ où b est la petite base, B la grande base et h une hauteur associée.

Observons qu'il est possible d'additionner des inégalités de même sens : si

$$\text{si} \quad a \leq b \quad \text{et} \quad c \leq d \quad \text{alors} \quad a + b \leq c + d.$$

Exemple 5.2.2. Si $x \geq 1$ et $2y \geq -3$ alors $x + 2y \geq -2$.

Inéquations et tableau de signes

Les inéquations que nous étudions peuvent toujours se ramener à une étude de signe. Nous allons donc établir des tableaux de signes de manière algébrique (par opposition à la résolution graphique du chapitre précédent).

Exemple 5.2.3. Prenons la fonction $f(x) = 3x - 9$. Lorsque nous traçons son graphique nous constatons que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses au point $x = 3$. Par suite, la partie de la courbe se trouvant au dessus de l'axe (Ox) (i.e. là où $f(x) > 0$) débute lorsque $x > 3$; la courbe se trouve sous l'axe des abscisses (i.e. $f(x) < 0$) lorsque $x < 3$.

Tout ceci se résume facilement dans un tableau.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $3x - 9$		$-$	0	$+$	

Et ceci se vérifie par le calcul en résolvant les inégalités $3x - 9 > 0$ et $3x - 9 < 0$.

Remarque. Si jamais nous avions la fonction $g(x) = -3x - 9$ nous n'aurions pas le même tableau de signe : hormis le fait que g s'annule en $x = -3$ plutôt que $x = 3$, les signes $+$ et $-$ sont échangés (par rapport à la fonction $f(x) = 3x - 9$). Ceci provient du signe du coefficient directeur :

$$-3x - 9 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -3x \geq 9 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq -\frac{9}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq -3$$

Nous avons du changé le sens de l'inégalité car nous avons divisé par le nombre $-3 < 0$.

En résumé, nous venons d'observer le résultat suivant.

Proposition 11 (Signe de $ax + b$)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, les résultats suivant donnent le signe du polynôme du premier degré $x \mapsto ax + b$.*

1. *Si $a < 0$ alors*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax + b$		$+$	0	$-$	

2. *Si $a > 0$ alors*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax + b$		$-$	0	$+$	

Exercices à traiter : Dresser le tableau de signe de $f(x) = 2x - 4$; dresser le tableau de signe de $g(x) = -16x + 8$ à la maison.

5.3 Fonctions linéaires et affines

Faisons un premier lien entre l'aspect graphique des fonctions (via leurs courbes) et les méthodes de résolutions établies dans ce chapitre. Tout au long de l'année, nous allons étudier une liste de fonctions très courantes. Toutes ces fonctions seront appelées fonctions de références car elles apparaitront de manière fréquente durant toute votre scolarité. Nous débutons par les plus simples d'entres elles, les fonctions linéaires et affines.

Définition 5.3.1. *Soit $a \in \mathbb{R}_*$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax$ est appelée fonction linéaire. Le coefficient a est désigné sous le nom de* coefficient directeur*.*

Remarque.
1. Il s'agit d'une des fonctions les plus simples car l'image d'un nombre réel x est obtenue en multipliant x par a.
2. La représentation graphique, dans un repère $(O; I; J)$, d'une telle fonction est une droite qui passe l'origine O du repère.

3. Graphiquement, le coefficient directeur s'interprète comme suit :

   - (cas **a>0**). En partant d'un point de la droite, si je me « **décale** » de 1 vers la droite alors je dois « **monter** », de a pour être à nouveau sur la droite.
   - (cas **a<0**). En partant d'un point de la droite, si je me « **décale** » de 1 vers la droite alors je dois « **descendre** », de a pour être à nouveau sur la droite.

Définition 5.3.2. *Soient $a \in \mathbb{R}_*$ et $b \in \mathbb{R}$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est appelée fonction affine. Le coefficient a est désigné sous le nom de **coefficient directeur** et b est appelé **ordonnée à l'origine**.*

Remarque. Si $b = 0$, nous retrouvons le cas des fonctions linéaires. La représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui passe par b.

Exemple 5.3.1. Voici un exemple de fonction affine dont le coefficient directeur est négatif. Graphiquement nous voyons que l'ordonnée à l'origine vaut $b = 2$ tandis que le coefficient directeur vaut $a = -3$.

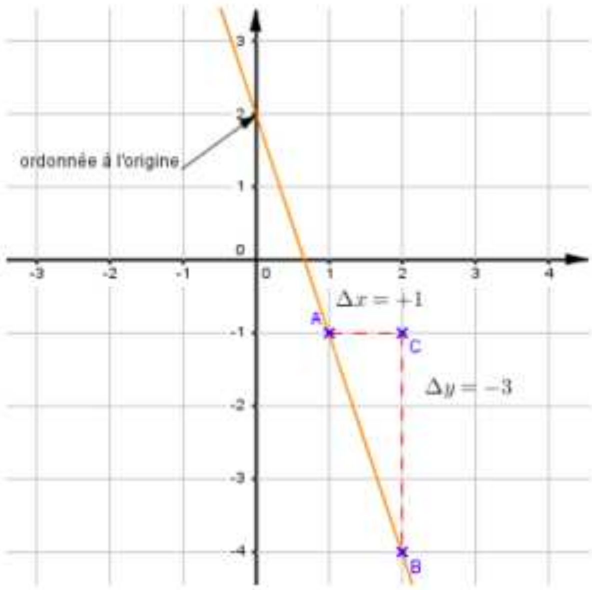

FIGURE 5.1: Représentation graphique de la fonction $f(x) = -3x - 2$

Exercices à traiter : 15,17,18 page 194 ; 20 page 194 à faire à la maison.

5.4 Bilan du chapitre

Voici les savoirs faire à acquérir dans ce chapitre :