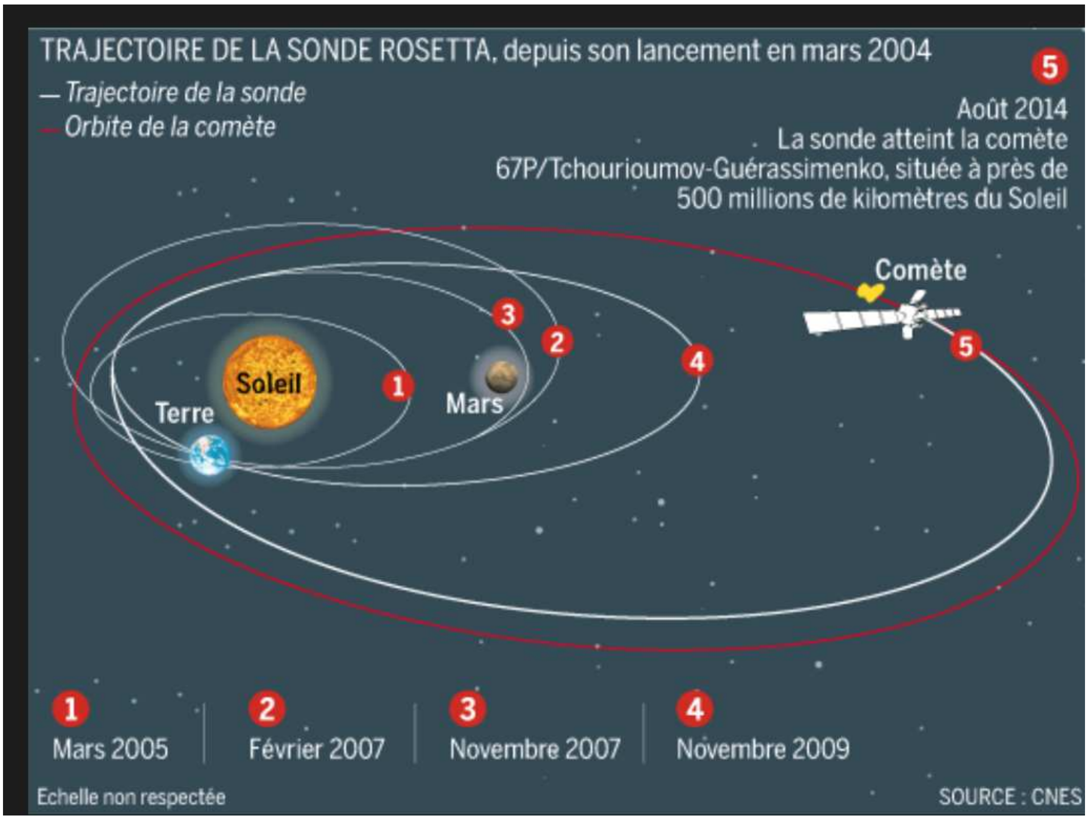
Chapitre 15

Droites du plan

En 2014, l'explorateur Philae se pose sur la comète Tchouri (et cela à près de 500 millions de kilomètres de la Terre). Comment pourrions nous naïvement modéliser ceci ? En tant qu'apprenti ingénieur, que faudrait-il déterminer savoir si l'explorateur va effectivement se poser sur la comète ? Les véritables trajectoires de ces objets sont des ellipses :



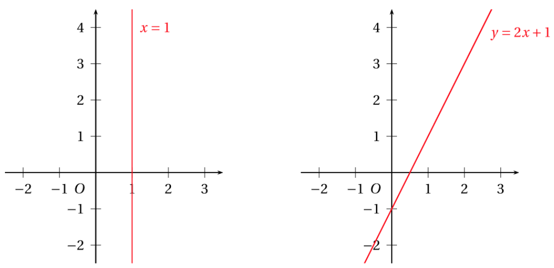
Tout ceci nous ramène à l'étude de droites (modélisation très simpliste de la situation impliquant Philae et Tchouri). Nous avions déjà constaté que les droites correspondait à la représentation graphique de fonction affines. Dans ce chapitre, nous allons poursuivre cette étude. En particulier, nous allons déterminer une représentation algébrique des droites : il s'agira d'une équation qui caractérisera les points du plan appartenant à une droite donnée ; cette caractérisation fera intervenir la notion de vecteur (dit directeur), ceci dressera un pont supplémentaire entre la géométrie et le calcul vectoriel.

15.1 Rappels

Dans un plan muni d'un repère, une droite $\mathcal{D}$ peut-être :

- soit **parallèle** à l'axe des ordonnées ;
- soit **sécante** à l'axe des ordonnées. Dans ce cas, il s'agit de la courbe représentative d'une fonction affine f (i.e. $f(x) = ax + b$).

Exemple 15.1.1. Voici deux exemples de telles droites.



Droite d'équation $x = 1$ Droite d'équation $y = 2x - 1$

Ainsi la représentation graphique d'une fonction affine ($f(x) = ax+b$) correspond à une droite $\mathcal{D}$ qui est sécante avec l'axe des ordonnées. Par ailleurs, nous avons déjà observé les résultats suivants :

- un point du plan $M(x; y)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient la relation suivante
$$y = ax + b$$
- a est le **coefficient directeur** de la droite $\mathcal{D}$ et b son **ordonnée à l'origine**. De plus, si $A(x_A; y_A) \in \mathcal{D}$ et $B(x_B; y_B)\mathcal{D}$ nous avons la formule suivante
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
permettant de déterminer le coefficient directeur. Comme nous l'avions déjà vu, celui-ci permet ensuite de trouver la valeur de b.

15.2 Equation réduite de droite

Après ces rappels, introduisons une nouvelle terminologie permettant de désigner une droite du plan sécante avec l'axe des ordonnées.

Définition 15.2.1. *Une équation de la forme $y = ax + b$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) est appelée* ***équation réduite*** *de droite.*

Exemple 15.2.1. En reprenant la figure 15.1.1, nous constatons que $y = 2x - 1$ est l'équation réduite représentant la 2ème droite.

Le coefficient directeur a, apparaissant dans l'équation réduite d'une droite, est utile pour déterminer si deux droites sont parallèles ou non.

Proposition 38. *Une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ et une droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = a'x + b'$ sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. En abrégé,*

$$\mathcal{D}//\mathcal{D}' \quad \iff \quad a = a'.$$

Remarque. En particulier, **si $a \neq a'$ les droites sont sécantes ; dans les cas contraire, elles sont parallèles**. Ainsi, en pratique, pour savoir si des droites se coupent ou non il faudra être capable de déterminer des équations réduites de droites à partir des coordonnées de points (appartenant à ces droites) pour ensuite comparer les coefficients directeurs.

Démonstration. Soient $\mathcal{D}//\mathcal{D}'$ de telles droites. Considérons alors A et B deux points distincts de la droite $\mathcal{D}$. Les droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par A et par B coupent la droite $\mathcal{D}'$ en deux points notés A' et B'. Par construction,

$$x_{A'} = x_A \quad \text{et} \quad x_{B'} = x_B. \tag{15.2.1}$$

Il suffit ensuite d'observer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' \quad \text{sont parallèles} \quad &\iff \quad ABB'A \quad \text{est un parallélogramme} \\
&\iff \quad [A'B] \quad \text{et} \quad [AB'] \quad \text{ont le même milieu} \\
&\iff \quad \frac{x_{A'} + x_B}{2} = \frac{x_A + x_{B'}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{y_{A'} + y_B}{2} = \frac{y_A + y_{B'}}{2} \\
&\iff \quad x_B - x_A = x_{B'} - x_{A'} \quad \text{et} \quad y_B - y_A = y_{B'} - x_{A'} \\
&\iff \quad \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} \\
&\iff \quad a = a'
\end{aligned}$$

où, dans l'avant dernière équivalence, nous avons utilisé la relation fournie par l'équation (15.2.1). □

Voyons ceci sur un exemple.

Exemple 15.2.2. 1. Considérons deux droites, d_1 et d_2, dont les équations réduites sont données par :

$$d_1 \, : \, y = 4x - 2 \quad \text{et} \quad d_2 \, : \, y = 4x + 6.$$

Nous observons que les coefficients directeurs sont égaux (ici, $a = 2$), les droites d_1 et d_2 sont donc parallèles.

2. Considérons deux droites, d_1 et d_2, dont les équations réduites sont données par :

$$d_1 : y = -5x + 3 \quad \text{et} \quad d_2 : y = 4x + 6.$$

Nous observons que les coefficients directeurs sont différents (i.e. $-5 \neq 4$), les droites d_1 et d_2 sont donc sécantes.

Lorsque deux droites sont sécantes, nous allons chercher à **déterminer les coordonnées du point d'intersection**. Pour faire cela de la façon la plus générale possible, il est nécessaire d'introduire la notion **d'équation cartésiennes de droite** (généralisant la notion d'équation réduite).

Exercices à traiter : 25 page 170 question a et b (pour la question *b* mettre d'abord les équations sous forme réduite) ; 25p170 (question c) à faire à la maison.

15.3 Equation cartésienne d'une droite

Il est ennuyeux d'avoir à faire systématiquement la distinction entre les droites parallèles à (Oy) (dont les équations sont de la forme la forme $x = k$) de celles qui ne le sont pas (dont les équations réduites sont de la forme $y = ax + b$). Une solution à ceci est la notion **d'équation cartésienne.**

Définition 15.3.1. *Toute équation de la forme*

$$(E) : \quad ax + by + c = 0 \quad \textit{avec} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

est appelée équation cartésienne de droite.

Remarque. Attention, les nombres a et b sont a priori distincts de ceux que nous avions rencontré dans les équations réduites de la forme $y = ax+b$. A partir de maintenant, pour éviter les confusions, nous écrirons les équations réduites sous la forme

$$y = mx + p \quad \text{avec} \quad m, p \in \mathbb{R}.$$

Comme nous allons le voir, les équations cartésiennes permettent de considérer, sans faire de distinction, les deux cas de figures (droites parallèles à l'axe des ordonnées ou droites sécantes avec l'axe des ordonnées). En plus de cela, ce genre d'équations nous permettra d'introduire le calcul vectoriel lié aux droites.

Proposition 39. *A toute droite $\mathcal{D}$ il est possible d'associer une équation cartésienne dans laquelle le couple $(a, b) \neq (0, 0)$ et réciproquement.*

Démonstration. 1. Considérons une équation cartésienne (E) pour laquelle $(a, b) \neq (0, 0)$.
   - Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et l'équation (E) s'écrit $x = -\frac{c}{a}$ ce qui correspond bien à une équation de droite de la forme $x = k$ avec $k = -\frac{c}{a} \in \mathbb{R}$.
   - Si $b \neq 0$, alors l'équation (E) s'écrit $y = \frac{1}{b}(-ax - c) = -\frac{a}{b} - \frac{c}{b}$ ce qui correspond à une équation de droite de la forme $y = mx + p$ avec $m = -\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ et $p = -\frac{c}{b} \in \mathbb{R}$.

2. Réciproquement, considérons une droite $\mathcal{D}$ du plan. Deux cas de figures s'offrent à nous.

- Si $\mathcal{D}$ a pour équation $x = k$, $k \in \mathbb{R}$, alors elle admet pour équation cartésienne $x - k = 0$ correspondant aux paramètres $(a, b, c) = (1, 0, -k)$.
- Si $\mathcal{D}$ a pour équation $y = mx + p$, $(m, p) \in \mathbb{R}^2$, alors elle admet pour équation cartésienne $-mx + y - p = 0$ ce qui correspond au triplet $(a, b, c) = (-m, 1, -p)$.

□

Remarque. Une droite $\mathcal{D}$ peut admettre plusieurs représentations cartésiennes : par exemple, les équations cartésiennes suivantes

$$x + y - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x + 2y - 6 = 0$$

désignent la même droite.

En pratique, il est important d'être capable de passer d'une équation réduite à une équation cartésienne. Voyons plutôt.

Exemple 15.3.1.

1. Par exemple, si $\mathcal{D}$ est la droite d'équation réduite $y = 2x - 3$. Cette équation peut se reformuler en

$$-2x + y + 3 = 0$$

   Il s'agit bien d'une équation cartésienne avec $a = -2$, $b = 1$ et $c = 3$.

2. Si $\mathcal{D}'$ est la droite d'équation $x = 3$. Sous forme cartésienne, cette équation devient

$$x - 3 = 0$$

   i.e. $a = 1$, $b = 0$ et $c = -3$.

Exercices à traiter : 49, 50 page 172 ; 67 page 173 et 68 page 173 (question a, d, f) à la maison.

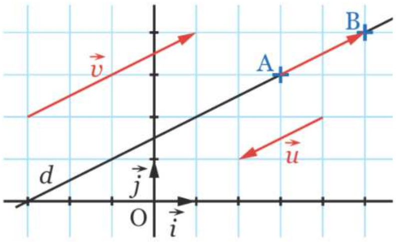
15.4 Vecteur directeur

Dans cette section, nous allons continuer d'explorer la géométrie à l'aide du calcul vectoriel. Le lien entre droites et calcul vectoriel s'effectue via la notion de **vecteur directeur**.

Définition 15.4.1. *Un **vecteur directeur** d'une droite $\mathcal{D}$ est un vecteur dont la **direction est parallèle** à celle de $\mathcal{D}$.*

Remarque. En particulier, pour tout couple A et B de points appartenant à la droite $\mathcal{D}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette même droite. Aussi, si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (d) alors $k\overrightarrow{u}$ (avec $k \in \mathbb{R}_*$) l'est également.

Exemple 15.4.1. Dans l'exemple ci-dessous, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont des vecteurs directeurs de la droite d.



Voyons à présent de quelle manière il est possible d'obtenir **un vecteur directeur à partir d'une équation cartésienne de droite**.

Proposition 40. *Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Si $\mathcal{D}$ admet pour équation cartésienne*

$$ax + by + c = 0 \quad \text{avec} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

alors $\overrightarrow{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{D}$ une droite admettant pour équation cartésienne (E) : $ax + by + c = 0$ ainsi que $A(x_A; y_A) \in \mathcal{D}$ et $M(x; y) \in \mathcal{D}$ deux points de cette droite. Autrement dit, nous avons les relations suivantes :

$$A(x_A; y_A) \in (d) \iff ax_A + by_A + c = 0 \iff -ax_A - by_A = c. \tag{15.4.1}$$

et

$$M(x; y) \in \mathcal{D} \iff ax + by + c = 0 \iff ax + by = -c. \tag{15.4.2}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ (puisque A et M sont des points de $\mathcal{D}$, nous avons $(AM)//\mathcal{D}$). Vérifions que ce vecteur est bien colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u} = (-b; a)$. Pour cela calculons le déterminant entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$, puis utilisons les relations des équations (15.4.1) et (15.4.2).

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = (x - x_A) \times a - (y - y_A) \times (-b) = ax + by - ax_a - by_a = -c + c = 0$$

Donc les vecteurs sont bien colinéaires et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. □

Voyons sur un exemple.

Exemple 15.4.2.
1. Si $\mathcal{D}$ admet pour équation la droite $3x + 7y - 3 = 0$ alors $\overrightarrow{u} = (-7; 3)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
2. Si $\mathcal{D}'$ admet pour équation réduite $y = 2x - 4$, ceci peut s'exprimer sous la forme de l'équation cartésienne $2x - y - 4 = 0$ et $\overrightarrow{u}(1; 2)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$.

Exercices à traiter : 28, 32 page 171 ; 53 page 172 à la maison.

Equations cartésiennes et vecteurs directeurs

La proposition suivante nous affirme qu'une droite $\mathcal{D}$ peut être **caractérisée par la donnée d'un point $A \in \mathcal{D}$ et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.**

Proposition 41. *[Caractérisation d'une droite] Soient $\mathcal{D}$ une droite, $A \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de cette droite. Nous avons la caractérisation suivante des points M appartenant à la droite $\mathcal{D}$.*

$$M \in \mathcal{D} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM} \quad \text{sont colinéaires.}$$

Remarque. Cette caractérisation permet d'obtenir facilement l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ à partir d'un point $A \in \mathcal{D}$ et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

Exemple 15.4.3. Dans un repère, déterminons une équation cartésienne des droites suivantes :

1. $\mathcal{D}$ passant par le point $A(-1;1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(3;2)$.
2. $\mathcal{D}'$ passant par les points $B(2;3)$ et $C(-3;5)$.

Présentons deux manières de répondre à la première question.

- Puisque $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, cela signifie que cette droite admet une équation cartésienne de la forme (E) : $2x - 3y + c = 0$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$. De plus, $A \in \mathcal{D}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation (E). Autrement dit, $2 \times (-1) - 3 \times (-3) + c = 0$ d'où $c = 5$.

- Nous pouvons également suivre la démonstration de la proposition 41 (que nous présentons à demi-mots sur cet exemple). L'idée est d'utiliser le déterminant entre deux vecteurs directeurs pour obtenir une équation cartésienne.

  Considérons un point générique $M(x;y) \in \mathcal{D}$ (il est essentiel que les coordonnées de M soient quelconques). Nous savons alors que le vecteur $\overrightarrow{AM}(x+1; y-1)$ est colinéaire au vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Ainsi, leur déterminant est nul :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2(x+1) - 3(y-1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x - 3y + 5 = 0$$

Traitons à présent la deuxième question. Puisque B et C appartiennent à la droite $\mathcal{D}'$, $\overrightarrow{BC}(-5,2)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$. C'est pourquoi $\mathcal{D}'$ admet pour équation cartésienne

$$(E') : \quad 2x + 5y + c = 0 \quad c \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la valeur de c, il suffit d'utiliser le fait que les coordonnées du point B (ou C) vérifie l'équation (E'). Nous obtenons ainsi $c = -19$.

Exercices à traiter : $58, 59$ page 172 ; $61, 72$ page 173 à la maison ; 64p173 (facultatif)

15.4.1 Vecteur directeur et position relative de droite

Enfin, voici une condition de **parallélisme entre deux droites à partir de leurs vecteurs directeurs**. Notons qu'il ne s'agit que d'une reformulation vectorielle de la proposition 38.

Proposition 42 (Condition de parallélisme)**.** *Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.*

Remarque. Cette condition peut se vérifier à l'aide du déterminant. En particulier, lorsque les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, les droites sont donc sécantes.

Pour conclure ce chapitre, traitons deux exemples

Exemple 15.4.4.

1. Considérons les droites suivantes :

$$\mathcal{D} \ : \ 4x - 6y + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' \ : \ -6x + 9y + 3 = 0$$

Alors $\overrightarrow{u} = (6; 4)$ dirige $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{v} = (-9; -6)$ dirige $\mathcal{D}'$. De plus, $\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = -36 + 36 - 2 = 0$, ainsi les vecteurs sont colinéaires et les droites sont donc parallèles.

2. Considérons les droites suivantes :

$$\mathcal{D} \ : \ 2x - y - 3 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' \ : \ -x - y + 3 = 0$$

Alors $\overrightarrow{u} = (1; 2)$ dirige $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{v} = (1; -1)$ dirige $\mathcal{D}'$. De plus, $\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = -1 - 2 = -3 \neq 0$, ainsi les vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites sont donc sécantes.

Soit $A(x; y)$ le point d'intersection de celles-ci, déterminons ses coordonnées en résolvant le système (obtenu à l'aide des équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$) suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y - 3 = 0 \\ -x - y + 3 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - 3 = 0 \\ 2 \times (-x - y + 3) = 2 \times 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcr} 2x - y - 3 = 0 & : & L_1 \\ -2x - 2y + 6 = 0 & : & L_2 \end{array} \right.$$

Observons à présent que l'addition (membre à membre) de la ligne L_1 avec la ligne L_2 supprime la variable x de l'équation et permet de trouver la valeur de y. En effet,

$$(2x - y - 3) + (-2x - 2y + 6) = 0 \quad \iff \quad -3y + 3 = 0 \quad \iff \quad y = 1.$$

Ainsi, en substituant la valeur de y dans la ligne L_1 (par exemple), nous en déduisons que

$$2x - 1 - 3 = 0 \quad \iff \quad x = 2.$$

Remarque. La méthode employée sur le deuxième exemple porte le nom de « **pivot de Gauss** » et permet de résoudre simplement des systèmes d'équations linéaires. L'avantage de cette procédure est quelle est très robuste et se généralise facilement à des systèmes plus complexes (3 inconnues, trois équations par exemple).

Exercices à traiter : 39 page 171, 82 et 93 page 174, 102 page 175 ; 83p174 et 101p175 à la maison ; 40p171, 96p175, 106 page 175, (facultatifs)