

Chapitre 5

Matrices, systèmes linéaires et graphes

5.1 Introduction

Voici quelques exemples permettant de motiver l'utilisation de matrices (que nous étudierons plus en détail dans la suite de ce cours).

5.1.1 Systèmes linéaires

Soit $a \in \mathbb{R}_*$ et $b \in \mathbb{R}$ des réels, il est plutôt élémentaire de résoudre l'équation suivante :

$$ax = b \iff x = \frac{b}{a} \iff x = a^{-1} \times b. \quad (5.1.1)$$

Il n'est pas non plus très difficile de résoudre, avec les outils vu en classe de 2nde et de 1^{ère}, le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 6y = -1. \end{cases} \quad (5.1.2)$$

Bien que de nature similaire, le système suivant semble encore plus complexe à résoudre :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

où $(a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ et $(b_i)_{i=1, \dots, n}$ sont des réels donnés. Voyons s'il n'est pas possible d'adopter des notations pratiques permettant de résoudre simplement ce genre de problème.

Peut-être que nous pourrions collecter les coefficients du système (5.1.2) sous la forme d'un tableau ? Par exemple en posant :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Il serait alors tentant de proposer l'écriture suivante de (5.1.2) :

$$AX = B$$

afin d'obtenir une solution dont l'expression est similaire à (5.1.1)

$$X = A^{-1}B$$

Seulement quel sens pouvons-nous donner à A^{-1} ou au produit $A^{-1}B$? D'ailleurs, l'égalité $A^{-1}B = BA^{-1}$ est-elle vérifiée?

5.1.2 Un peu de génétique

Au 19^{ème} siècle, un moine du nom de Gregor Mendel procède à des expériences de croisement de variétés de pois¹ pour étudier certains traits héréditaires (la couleur du pois par exemple). Après quelques expériences, il observe un résultat surprenant : en croisant deux pois jaunes (a priori identique d'un point de vue extérieur) il a obtenu un pois vert. Il propose alors en 1866 la théorie suivante : **le génotype et le phénotype** (d'un trait particulier) **sont deux choses distinctes**.

Il suggère alors un modèle permettant de mieux saisir ce qui se produit pour les pois. D'après Mendel, la couleur d'un pois est **déterminé par deux gènes** se présentant sous **deux types différents** (i.e. impliquant des allèles différents) :

1. un type *dominant* que nous noterons d
2. un type *récessif* que nous noterons r .

Ainsi, un individu peut avoir un *génotype* de la forme :

1. $D = (dd)$ un *dominant pur* ;
2. $H = (dr)$ un *hybride* ;
3. $R = (rr)$ un *récessif pur*.

Lors d'un croisement entre deux individus, la descendance obtient un gène (pris au hasard) de chacun de ses parents (reproduction diploïde). De plus, Mendel propose le postulat suivant : lorsque **le gène d** est présent il **détermine le phénotype** de l'individu (ici la couleur du pois). **Le gène récessif r détermine le phénotype** uniquement lorsque le **génotype est de la forme (rr)** .

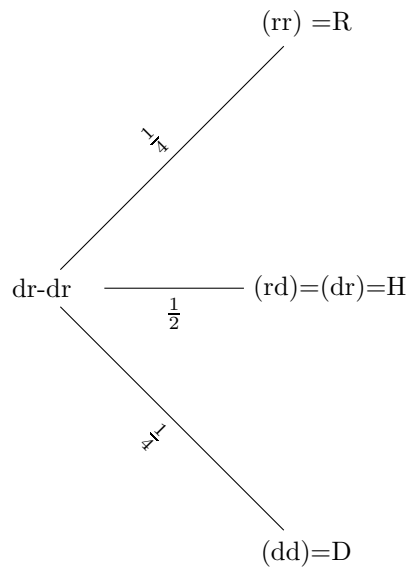
Remarque. Notons donc que les génotypes (dd) et (dr) donnent lieu au même phénotype.

Voici une expérience qu'il est possible de mener avec ce trait héréditaire : prenons un individu quelconque (un pois) et croisons le avec un hybride (de génotype (dr)). Prenons ensuite un descendant d'un tel croisement et croisons-le à nouveau avec un hybride. Il est facile de décrire les différents cas de figures lors du premier croisement. Traitons un premier cas décrivant le croisement de deux hybrides (dr) :

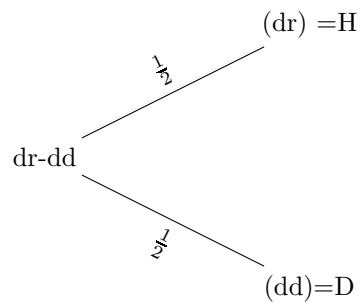
1. des pois verts à priori mais, parfois, les pois sont rouges.

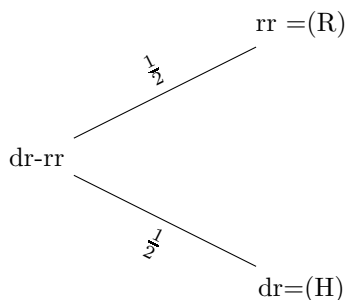
dr \ dr	d	r
d	dd	dr
r	rd	rr

Autrement dit, la probabilité d'obtenir un génotype $D = (dd)$ vaut $\frac{1}{4}$, un génotype $H = (dr)$ vaut $\frac{1}{2}$ et un génotype récessif $R = (rr)$ vaut $\frac{1}{4}$. Ceci peut se résumer à l'aide d'un arbre pondéré :



Bien entendu, il est possible de procéder de la même manière lorsque le croisement concerne un hybride H avec un dominant D ou un récessif R avec un hybride :





Que se passe-t-il si nous itérons encore et encore cette expérience? Quelles notations (mathématiques) pourrions-nous adopter pour qu'il soit plus simple de comprendre ce qui se produit au bout de 50 croisements?

Pourrions-nous représenter l'expérience de croisement par un tableau similaire à ceux proposés dans la résolution de système d'équations? (cf. section précédente). Il semble judicieux de placer dans le « tableau » suivant les probabilités obtenues plus tôt :

$$\begin{array}{c}
 D \\
 H \\
 R
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 D & H & R \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
 \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\
 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
 \end{pmatrix}$$

Ce tableau se lit de ligne en colonne : supposons que nous débutons avec un individu de phénotype H alors, après croisement avec un hybride H , nous obtenons dans la deuxième ligne :

- $\frac{1}{4}$ de chance d'obtenir un individu de phénotype D ,
- $\frac{1}{2}$ de chance d'obtenir un individu de phénotype H ,
- $\frac{1}{4}$ de chance d'avoir un individu de phénotype R .

Ce qui correspond précisément aux premières valeurs que nous avons trouvé plus tôt. Les autres lignes se lisent de la même manière (toujours en effectuant un croisement avec un hybride). Nous reviendrons sur cette utilisation des matrices plus tard dans l'année.

5.2 Calcul matriciel

Les objets que nous avons esquissé la forme durant l'introduction ont été inventé par les mathématiciens Sylvester (1814 – 1897) et Cayley (1821 – 1895). Nous allons voir quelles opérations classiques, entre de tels objets, sont licites et de quelle manière celle-ci peuvent servir à représenter, de manière plus synthétique, un système linéaire.

5.2.1 Notions de matrices

Définition 5.2.1. Une matrice A , à coefficients réels, de $n \geq 1$ lignes et $p \geq 1$ colonnes est un tableau rectangulaire, de taille $n \times p$, composé de nombres réels $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{12} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients réels est noté $M_{n \times p}(\mathbb{R})$; lorsque $n = p$, nous noterons ceci $M_n(\mathbb{R})$.

Remarque. Voyons quelques mots de vocabulaire :

- Lorsque $n = p$, nous parlerons de matrice **carrées** de taille n ;
- Lorsque $p = 1$, nous parlerons de matrice **colonne** ;
- Lorsque $n = 1$, nous parlerons de matrice **ligne**.

L'écriture d'une matrice est **unique** : si A, B sont deux matrices de tailles $n \times p$ alors

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \text{ pour tout } (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}.$$

Exemple 5.2.1. Voici quelques exemples :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R}), \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 8 \\ 25 & -12 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

Remarque. La matrice B est aussi appelée vecteur colonne.

Certaines matrices carrées joueront un rôle particulier par la suite, il s'agit de la matrice **nulle**, la matrice **identité** et des matrices **diagonales**.

Définition 5.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}_*$.

1. La matrice nulle $0_{M_n(\mathbb{R})}$ (que nous noterons la plupart du temps 0) est définie comme suit :

$$0_{M_n(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2. La matrice identité Id_n (que nous noterons la plupart du temps I_d) est définie comme suit :

$$Id_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

où les constantes 1 sont uniquement placées sur les termes diagonaux de la matrices.

3. La matrice identité est un cas particulier des matrices diagonales. Une matrice diagonale D est de la forme suivante :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

avec a_{11}, \dots, a_{nn} des réels.

4. Une matrice (carrée) $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite **symétrique** si

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{pour tout } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Exemple 5.2.2. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

est une matrice symétrique.

5.2.2 Opérations sur les matrices

Soient $p \geq 1$ et $n \geq 1$, considérons deux matrices de même taille : $A, B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$. Quel sens donner à l'opération $A + B$? Si de plus, nous considérons un réel (appelé « scalaire ») $\lambda \in \mathbb{R}$, comment définir $\lambda \times A$?

Définition 5.2.3. La matrice $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, correspondant à la somme $A + B$, est définie comme suit :

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1p} + b_{1p} \\ a_{12} + b_{12} & \dots & a_{2p} + b_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}.$$

Remarque. Cela revient à additionner termes à termes les coefficients des matrices.

Attention : il n'est pas possible d'additionner des matrices de tailles **différentes**.

Exemple 5.2.3. Considérons les matrices suivantes :

- 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 16 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors la matrice $C = A + B$ vaut

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 16 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

alors

$$C = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercices à traiter : 15 page 190.

Définition 5.2.4. Le produit d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ avec une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est défini comme suit :

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

en multipliant tout les termes a_{ij} de la matrice par le réel λ .

Exemple 5.2.4. Reprenons la matrice A de l'exemple précédent et multiplions la par $\lambda = 2$, nous obtenons alors la matrice

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 32 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercices à traiter : 20, 21 page 190.

Remarque. Implicitement, nous venons de voir que l'ensemble des matrices $M_{n \times p}(\mathbb{R})$ est **stable par addition et par multiplication par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{R}$ (au sens où les nouveaux objets obtenus, après ces opérations, sont toujours des éléments de $M_{n \times p}(\mathbb{R})$). Il n'est pas difficile de montrer que l'addition matricielle et la multiplication par un scalaire vérifient une **relation de distributivité et d'associativité**. Il est également possible de montrer que toute matrice admet une matrice **opposée**, c'est à dire :

$$\forall A \in M_{n \times p}(\mathbb{R}), \quad \exists ! B \in M_{n \times p}(\mathbb{R}), \quad A + B = 0_{M_{n \times p}(\mathbb{R})}.$$

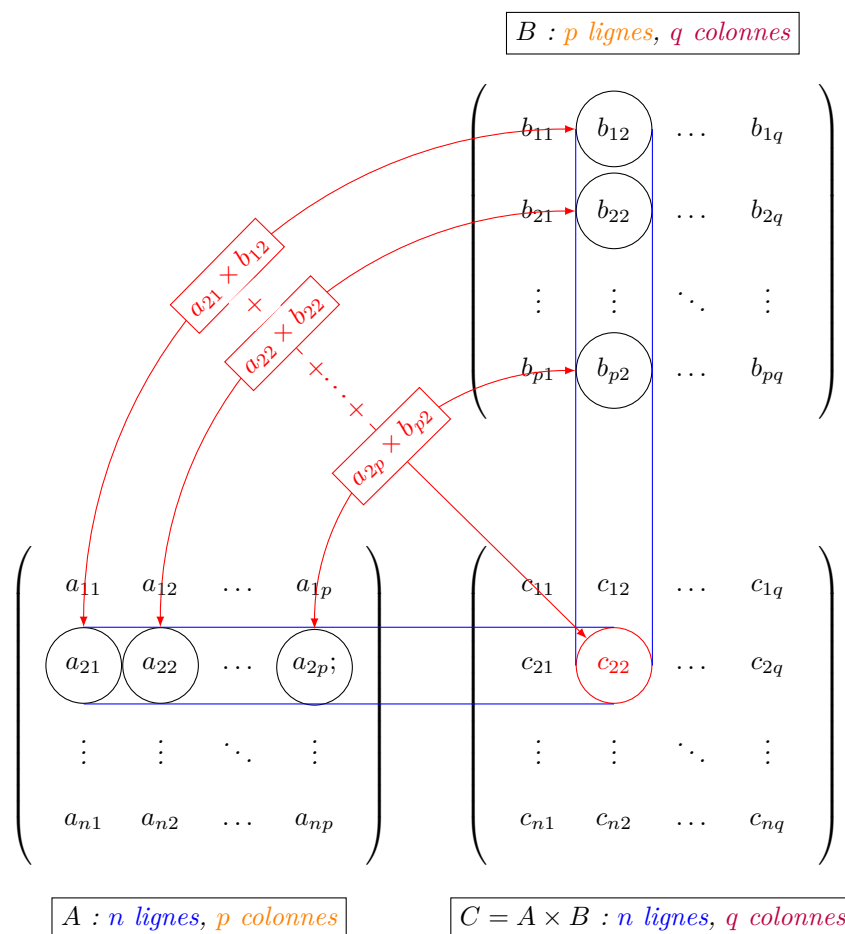
Une telle matrice B sera notée $-A$. Une façon synthétique de résumer tout ce qui précède est de dire que $M_{n \times p}(\mathbb{R})$ est un **\mathbb{R} -espace vectoriel**. Ceci sera vu plus en détails, de manière théorique, durant les deux premières années de la licence.

Etant donné deux matrices A et B comment définir le produit AB ? Tout les produits sont-ils envisageables ou bien faut-il imposer certaines restriction aux tailles des matrices A et B ?

Définition 5.2.5. Soient $n \geq 1, p \geq 1, q \geq 1$, considérons alors des matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q} \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$. Le produit C de telles matrices est défini comme suit :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad \text{où} \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq q.$$

De manière plus visuelle, cela correspond au schéma suivant :



Remarque. Attention : il est essentiel que le nombre de **colonnes de la matrice A** coïncide avec le nombre de **lignes de la matrices B** pour effectuer le produit AB . Lorsque les matrices sont carrées les deux produits AB et BA ont alors du sens. Cependant, en général, $AB \neq BA$ (contrairement au produit entre deux nombre réels)².

Exemple 5.2.5. Soient A et B deux matrices définies comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

alors

2. Nous avons vu que les complexes généralisaient les nombres réels mais que nous perdions la possibilité de les comparer, les matrices généralisent également la notion de nombre réels mais nous perdons la propriété de commutativité du produit.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \times 12 + 2 \times 1 + (-1) \times 0 & 0 \times (-1) + 2 \times (-1) - 1 \times 5 \\ 3 \times 12 + 4 \times 1 + (-3) \times 0 & 3 \times (-1) + 4 \times (-1) - 3 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 40 & -22 \end{pmatrix}.$$

Exercices à traiter : 16,23 page 190.

Puisqu'il est possible de calculer le produit de deux matrices, il est certainement envisageable de définir la notion de puissances de matrices.

Définition 5.2.6. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $A \in M_p(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice $A^n \in M_n(\mathbb{R})$ est définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} A^0 = I_d, \\ A^{n+1} = A \times A^n. \end{cases}$$

Remarque. Contrairement aux nombres réels, il est possible d'obtenir la matrice nulle à partir d'une puissance d'une matrice non nulle : si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors nous pouvons vérifier que $A^2 = 0$.

Voici un exemple de matrices pour lequel il est assez simple de déterminer A^n .

Exemple 5.2.6. Si $A \in M_p(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{pp} \end{pmatrix}$$

alors

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^n & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{pp}^n \end{pmatrix}$$

Exercices à traiter : 24 page 190.

5.2.3 Inverse de matrice et résolution de système

Comme nous avons pu le découvrir dans l'introduction, les matrices s'avèrent un outil commode pour représenter un système linéaire d'équations à plusieurs inconnues. Pour l'observer, revenons à l'un de nos premiers exemples :

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 6y = -1 \end{cases}$$

Nous venons de voir qu'il était possible d'exprimer ceci en termes matricielles : $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

Il est donc tentant de procéder comme avec des réels : $ax = b \iff x = a^{-1}b$ (pour $a \in \mathbb{R}_*$ et $b \in \mathbb{R}$) en proposant comme solution

$$X = A^{-1}B$$

Toutefois, il faut donner un sens à A^{-1} ! A quelle condition un tel objet existe-t-il ? Dans \mathbb{R} c'est assez simple, il faut et il suffit que a soit non nul pour que a^{-1} existe. Lorsqu'il s'agit de matrice nous parlerons **d'inversibilité**. Dans un premier temps nous allons donner une définition de ceci, puis voir de quelle manière calculer l'inverse d'une matrice carrée de taille 2.

Définition 5.2.7. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On dira que la matrice B est l'inverse de la matrice A si la relation suivante est satisfaite :

$$AB = BA = I_d \tag{5.2.1}$$

Si elle existe, une telle matrice est unique. Nous la désignerons par A^{-1} .

Remarque. La relation (5.2.1) est similaire à celle des réels : $a \times a^{-1} = 1$.

Exemple 5.2.7. 1. Plaçons nous dans l'espace des matrices de tailles 2×2 et considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifiez que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est bien l'inverse de la matrice A .

2. Montrons que la matrice suivante n'admet pas d'inverse :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet, si une telle matrice existait elle serait de la forme $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et satisfera la relation $CD = DC = I_d$. Autrement dit, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

doit être égale à la matrice $I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ce qui est absurde car $0 \neq 1$. Donc la matrice C n'est pas inversible.

Exercices à traiter : 26 page 190.

Lorsque $n = 2$, il existe une formule simple à retenir pour déterminer l'inverse d'une matrice A .

Proposition 35. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Nous avons l'équivalence suivante :

$$A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \iff ad - bc \neq 0.$$

Remarque. La quantité $ad - bc$ est appelée déterminant de la matrice A (noté $\det(A)$). Dans \mathbb{R} , un réel est inversible s'il est différent de 0, pour les matrices il faut vérifier que son déterminant est différent de 0 pour qu'elle soit inversible³.

Exercice à traiter : 27 page 190.

Ce résultat d'inversion mène facilement à la proposition suivante.

Proposition 36. Considérons un système d'équations donné sous la forme (matricielle)

$$(E) : AX = B$$

avec $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B, X \in M_{n1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes. Si A est inversible alors le système (E) admet une unique solution donnée par

$$X = A^{-1}B$$

Remarque. Comment faire si A n'est pas inversible? Notre problème étant linéaire (en X), il peut se résoudre facilement avec des idées qui ont déjà été observé à différents endroits du cours :

1. Si $y' + ay = f$ avec f une fonction donnée admet ϕ_0 comme solution particulière alors les solutions sont de la forme

$$\phi + \phi_0 \quad \text{où } \phi \text{ est solution de } y' + ay = 0$$

2. Si $u_{n+1} + au_n = b$ avec $b \in \mathbb{R}$ admet r comme solution particulière⁴ alors les solutions sont de la forme

$$\phi_n + r \quad \text{où } \phi \text{ est solution de } u_{n+1} + au_n = 0$$

3. Si $ax + by = c$ admet c_0 comme solution particulière alors les solutions sont de la forme

$$c + c_0 \quad \text{où } \phi \text{ est solution }^5 \text{ de } ax + by = 0.$$

C'est exactement la même chose ici : il suffit de trouver X_0 une solution particulière afin d'obtenir toutes les solutions de l'équation sous la forme $X + X_0$ où X est solution de $AX = 0$.

Exemple 5.2.8. Reprenons notre exemple. Dans celui-ci, nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

Puisque $\det(A) = 12 + 1 = 13 \neq 0$, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. La solution du système d'équation vaut alors $X = A^{-1}B = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 19 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercices à traiter : 28, 49 page 190 ; 51 page 193 ; 66 page 195.

3. Il existe une formule explicite pour l'inverse de matrice de tailles supérieure à 2 mais celle-ci est moins pratique d'emploi que celle en dimension 2.

4. r est un point fixe de $x + ax = b$.

5.2.4 Transformations du plan

Mentionnons en passant que les matrices permettent également de modéliser des transformations géométriques. Plaçons nous dans le plan pour simplifier l'exposition.

Exemple 5.2.9.

Supposons que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est l'application linéaire qui à un point du plan $M(x; y)$ lui fait correspondre son symétrique $M'(x'; y')$ par rapport à l'axe des ordonnées. Alors, f peut se représenter par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ à l'aide de la formule

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff X' = AX$$

avec $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Il est possible de traiter de nombreux exemples, voir des les mélanger.

Exemple 5.2.10. 1. La matrice associée à une rotation d'angle θ , centrée en O , est donnée par

$$\text{Rot}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

2. L'homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}$, centrée en O , se représente par la matrice

$$\text{Hom}_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

Remarque. Assez curieusement, la définition formelle et rigoureuse d'un angle θ correspond à la matrice de rotation Rot_θ .

5.3 Les graphes

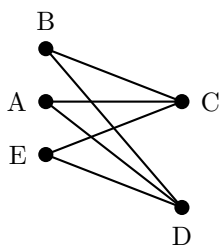
Afin d'étudier des modélisations matricielles plus complexes (par exemple le problème de génétique) il est nécessaire d'introduire la notion de graphe ainsi que le vocabulaire associé.

5.3.1 Vocabulaire et définitions

Définition 5.3.1. • Un graphe est une représentation composée de **sommets** (des points) reliés par des **arêtes** (segments).

- Un graphe est dit **orienté** lorsque les arêtes sont munies d'un **sens de parcours**.
- L'**ordre** d'un graphe est le **nombre de sommets** qui le compose.
- Le **degré d'un sommet** est le **nombre d'arêtes incidentes** (sans tenir compte d'un éventuel sens de parcours) à ce sommet.

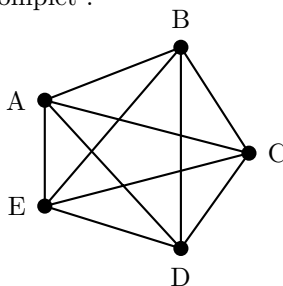
Exemple 5.3.1. La graphe ci-contre est d'ordre 5, les sommets C et D sont de degré 3 et les sommets A, B, E de degré 2.



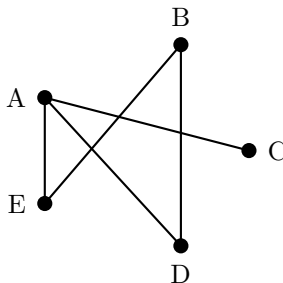
Exercices à traiter : 32 page 191.

Définition 5.3.2. Deux sommets sont dit **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par au moins une arête. Un graphe est **complet** lorsque tous ses sommets sont deux à deux adjacents.

Exemple 5.3.2. 1. Le graphe suivant est complet :



2. Celui-ci n'est pas complet, les sommets A et B ne sont pas adjacents par exemple.

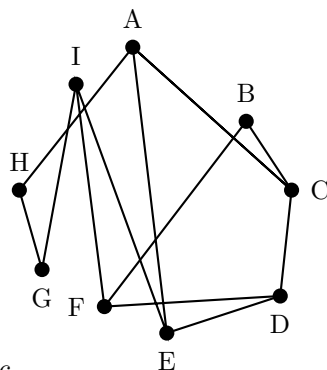


Exercices à traiter : 68 page 196 et 74 page 196.

Définition 5.3.3. 1. Pour un graphe non orienté, une **chaîne** est une suite d'arêtes consécutives reliant deux sommets (éventuellement confondus). La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes la composant.

2. Pour un graphe orienté, un **chemin** est une suite d'arêtes consécutives reliant deux sommets (éventuellement confondus) en tenant compte du sens de parcours des arêtes.

Exemple 5.3.3. Dans le graphe ci-dessous, $A - E - I - G - H$ est une chaîne de longueur 4. De même, $A - C - B - F - D - C - A$ est une chaîne de longueur 6.

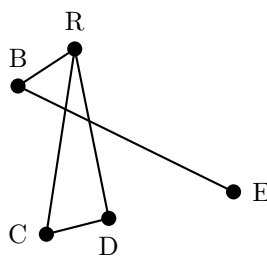


Exercice à traiter : 69 page 196.

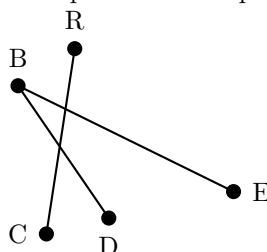
Comme nous le verrons plus tard, le fait que les sommets soient reliés ou non risque d'être important. Cette observation mène à la terminologie suivante.

Définition 5.3.4. Un graphe non orienté est **connexe** lorsque chaque couple de sommets peut-être relié par une chaîne.

Exemple 5.3.4. 1. Un graphe connexe



2. Un graphe non connexe ; R et B ne peuvent pas être reliés par une chaîne.



Exercices à traiter : 18 page 190 et 75, 77 page 197.

5.3.2 Graphes et matrices

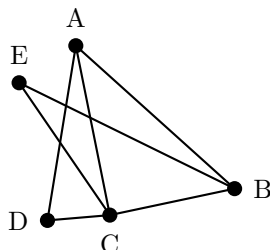
Pour l'étude que nous souhaitons faire, il faut trouver un moyen de relier graphes et matrices.

Définition 5.3.5. Soit $n \in \mathbb{N}_*$, considérons un graphe d'ordre n (orienté ou non) dont les sommets sont numérotés de 1 à n puis rangés dans l'ordre croissant. La **matrice d'adjacence** de ce graphe est la matrice carrée (de taille n) dont le coefficient $a_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes partant du sommet i pour arriver au sommet j .

Remarque. Dans ce qui suit nous supposons à chaque fois avoir numérotés et rangés dans l'ordre croissant les sommets.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 5.3.5. Considérons le graphe suivant



Numérotons les sommets de la manière suivante : $S_1 = A, S_2 = B, S_3 = C, S_4 = D$ et $S_5 = E$ alors la matrice d'adjacence associée à ce graphe est

$$M = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{matrix}$$

Remarquons en passant que la matrice M est **symétrique**; c'est toujours le cas lorsque le graphe est non orienté.

Exercices à traiter : 36, 37 page 190 et 78 page 197.

Etant donné une longueur $k \in \mathbb{N}_*$, il est possible de relier les puissances d'une matrice d'adjacence avec le nombre de chemin de taille k reliant deux sommets.

Proposition 37. Soient $n, k \in \mathbb{N}_*$ et M la matrice d'adjacence associée à un graphe d'ordre n . Le terme m_{ij} de la i -ème ligne et de la j -ème colonne de **la matrice** M^k donne le **nombre de chaînes (ou de chemins) de longueur k reliant S_i à S_j** .

Reprenons l'exemple précédent pour illustrer ceci.

Exemple 5.3.6. Après quelques calculs, nous observons que

$$M^2 = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{matrix}$$

Nous voyons donc que $m_{53} = 1$ cela signifie qu'il n'y a qu'un seul chemin de taille 2 qui relie S_5 à S_3 . Puisque $a_{33} = 4$ cela signifie qu'il existe 4 chemins de tailles 2 qui partent de S_3 pour y revenir.

Exercices à traiter : 38, 39 page 191 et 83 page 198 ; 86 page 199.