# Chapitre 13

# Vecteurs (2ème partie)

Dans ce chapitre nous allons poursuivre l'étude initiée dans le chapitre introduisant les vecteurs et leurs coordonnées. Nous allons voir de quelle manière il est possible de traduire les notions de géométrie rencontrées au collège à l'aide de vecteurs. Ici nous allons étudier la notion de **parallélisme**. Cette étude va nous permettre d'obtenir des outils permettant de vérifier avec certitude si des droites sont parallèles ou non. Contrairement à ce que nous pourrions imaginer, notre oeil peut facilement être trompé :

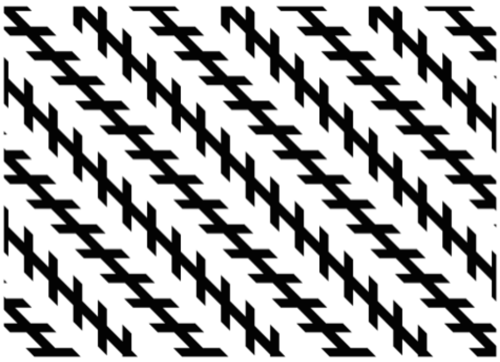
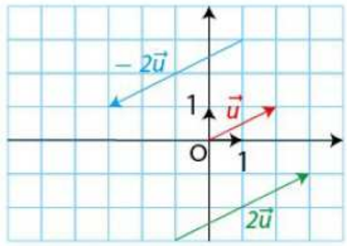


FIGURE 13.1: Illusion de Zöllner (1860)

## 13.1 Colinéarité entre deux vecteurs

Rappelons qu'il est possible de **multiplier un vecteur** $\overrightarrow{u}$ par un **nombre réel** $k \in \mathbb{R}^*$. Graphiquement, cette opération **modifie la taille du vecteur** (et éventuellement son sens si $k < 0$) du vecteur proportionnellement au facteur $k$. Algébriquement, cela revient à **multiplier les coordonnées du vecteur** $\overrightarrow{u}$ par la constante $k$.

**Exemple 13.1.1.** Si $\overrightarrow{u} = (2; 1)$ et $k = 2$ alors $k \times \overrightarrow{u} = (2 \times 2; 2 \times 1) = (4; 2)$ et le nouveau vecteur est trois fois plus « grand »que le vecteur de départ.




**Définition 13.1.1.** *Deux vecteurs, non nuls,* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont* ***colinéaires*** *lorsqu'il existe un réel* $k \neq 0$ *tel que* $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$

*Remarque.* 1. Géométriquement, cela signifie que les **vecteurs** $\overrightarrow{u}$ **et** $\overrightarrow{v}$ **possèdent la même direction** (mais pas nécessairement le même sens).

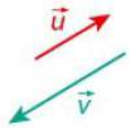



FIGURE 13.2: deux vecteurs colinéaires

2. La définition précédente est **symétrique** :

$$\overrightarrow{u} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{v} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{u}.$$

En effet, si $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$, il existe $k \in \mathbb{R}$ non nul tel que

$$\overrightarrow{u} = k \times \overrightarrow{v}.$$

Puisque $k \neq 0$ ceci peut aussi s'écrire $\overrightarrow{v} = \frac{1}{k} \times \overrightarrow{u}$. Si nous posons $k' = \frac{1}{k} \in \mathbb{R}^*$, nous avons donc $\overrightarrow{v} = k' \times \overrightarrow{u}$. Autrement dit, $v$ est colinéaire à $u$.

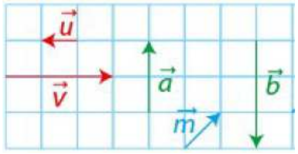
**Exemple 13.1.2.** 1. Les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1; 2)$ et $\overrightarrow{v} = (-2; -4)$ sont colinéaires car $\overrightarrow{v} = -2 \times \overrightarrow{u}$.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{u} = (6; -3)$ et $\overrightarrow{v} = (4; -2)$ sont colinéaires car $\overrightarrow{v} = \frac{2}{3} \times \overrightarrow{u}$.

3. Dans l'exemple ci-dessous, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{m}$ est colinéaire avec aucun autre vecteur de la figure.

**Exercices à traiter :** 53,54 page 127 ; 55 page 127 à faire à la maison.

Lorsqu'un repère du plan $(O; I; J)$ est disponible, la notion de colinéarité entre deux vecteurs correspond à une relation de proportionnalité entre les coordonnées de ces vecteurs. Nous avons le critère suivant permettant d'établir la colinéarité entre deux vecteurs à partir de leurs coordonnées.




**Proposition 34** (Critère de colinéarité)**.** *Soient* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *deux vecteurs. Ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si*

$$xy' - x'y = 0.$$

*Démonstration.* Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{R}_*$ tel que $\vec{u} = k \times \vec{v}$, cela implique que $\vec{u} = (kx'; ky')$,

$$\text{i.e.} \quad x = kx' \quad \text{et} \quad y = ky'.$$

Par suite,

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = kx'y' - ky'x' = 0.$$

Réciproquement, supposons que $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \iff xy' - yx' = 0$. Si au moins l'un des vecteurs est nul, le résultat est évident et n'importe quelle valeur $k \neq 0$ convient. Supposons donc que $\vec{u}$ est non nul. Deux cas de figures s'offrent à nous

1. Soit $x \neq 0$, nous en déduisons que

$$xy' - yx' = 0 \iff xy' = yx' \iff y' = \frac{yx'}{x}.$$

   Ainsi, $\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k = \frac{x'}{x}$.

2. Soit $y \neq 0$ et, en suivant le même raisonnement, nous obtenons

$$xy' - yx' = 0 \iff x' = \frac{xy'}{y}.$$

   Ainsi, $\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k = \frac{y'}{y}$.

Dans chacun des cas nous avons trouvé $k \in \mathbb{R}_*$ tel que $\vec{v} = k \times \vec{u}$. Les vecteurs sont donc bien colinéaires. □

*Remarque.* La quantité précédente correspond au déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Elle est souvent notée de la manière suivante :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.$$

Géométriquement, elle correspond à l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

**Exemple 13.1.3.** 1. Utilisons le critère précédent pour montrer que les vecteurs $\vec{u} = (6; -3)$ et $\vec{v} = (4; -2)$ sont colinéaires. Ici, nous avons

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = 6 \times (-2) - (-3) \times 4 = 0.$$

Les vecteurs sont donc colinéaires.

2. Si maintenant, nous avons $\overrightarrow{u} = (-2; 1)$ et $\overrightarrow{v} = (3; 4)$ alors

$$\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = -2 \times 4 - 1 \times 3 = 5 \neq 0.$$

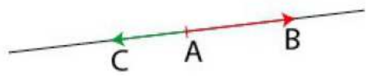
Les vecteurs sont donc pas colinéaires.

**Exercices à traiter :** Reprendre l'exercice 54p127 en utilisant le déterminant, 58 page 127, 61 page 127 (algo) ; 56 page 127 (à faire à la maison).

## 13.2 Applications de la colinéarité en géométrie

La notion de colinéairité permet de savoir si des points sont alignés

**Proposition 35.** *Soient $A, B$ et $C$ trois points du plan, deux à deux distincts. Les points $A, B$ et $C$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.*




*Remarque.* Bien entendu, il est possible remplacer, dans le théorème précédent, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$. L'important est que les vecteurs mis en jeu aient un point en commun.

**Exemple 13.2.1.** Soit $A(1; 2)$ $B(-3; 4)$ et $C(1; 3)$. Montrons que ces points ne sont pas alignés. Pour cela, il faut et il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires. Ici,

$$\overrightarrow{AB} = (-4; 2) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = (0; 1)$$

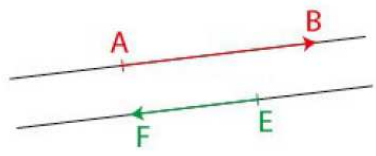
Ainsi, $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -4 \times 1 - 2 \times 9 = -4 \neq 0$. Les vecteurs sont donc non colinéaires et, par conséquent, les points ne sont pas alignés.

**Exercices à traiter :** 59 page 127.

La colinéarité de vecteurs permet également de savoir si des droites sont parallèles.

**Théorème 36.** *Soient $A, B, E$ et $F$ quatre points du plan, deux à deux distincts. Les droites $(AB)$ et $(EF)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.*

**Exemple 13.2.2.** Soient $A(-2; 3)$, $B(4; 2)$ et $D(3; -\frac{1}{2})$. Montrer que les droites $(AB)$ et $(OD)$ sont parallèles. Pour cela, il faut et il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires. Ici, nous avons




$$\overrightarrow{AB} = (6; -1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OD} = (3; -\frac{1}{2})$$

Par suite, $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{OD}) = 6 \times (-\frac{1}{2}) - (-1) \times 3 = 0$. Les vecteurs sont donc bien colinéaires et, en conséquence, les droites sont parallèles.

**Exercices à traiter :** 10, 12 page 123 ; 60 page 127 à faire à la maison ; 62,63 page 127 (facultatifs).

La vidéo suivante est l'occasion de rencontrer un problème géométrique célèbre qui a été résolu il y a peu.
https://www.arte.tv/fr/videos/097454-004-A/voyages-au-pays-des-maths/.

## 13.3 Colinéarité sans coordonnées

Nous avons observé qu'il était assez simple d'établir que des vecteurs étaient colinéaires (ou non) en utilisant les coordonnées et le déterminant. Pourtant, en y réfléchissant, la notion de colinéarité a été énoncé sans faire référence à un système de coordonnées. C'est qu'il doit être possible de s'en passer. Voyons plutôt ceci sur un exemple.

**Exemple 13.3.1.** Soit $ABC$ un triangle. Construisons ensuite les points $E$ et $F$ tel que

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$$

Nous avons l'impression que les droites $(FE)$ et $(BC)$ sont parallèles. Pour justifier ceci, il nous suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Toute la démonstration va reposer sur la relation de Chasles.

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$$

or nous savons que $\overrightarrow{EA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et que $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$. En conséquence,

$$\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Il nous reste à simplifier la somme des deux derniers vecteurs, pour cela utilisons une fois de plus la relation de Chasles afin d'introduire le point $B$ :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Nous obtenons alors

$$\overrightarrow{FE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Nous avons donc établi que $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ : i.e. les vecteurs sont colinéaires et les droites sont parallèles.

*Remarque.* En fait, nous aurions pu introduire un système de coordonnées en choisissant le repère[1] $(A; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$. En faisant cela, nous obtenons les coordonnées suivantes

$$A(0;0) \quad ; \quad B(0;1) \quad ; \quad C(1;0) \quad ; \quad F(\frac{3}{2};-1) \quad \text{et} \quad E(1;-\frac{1}{2}).$$

car

- $A$ est l'origine de ce repère,
- $\overrightarrow{AB} = 0 \times \overrightarrow{AC} + 1 \times \overrightarrow{AB}$,
- $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - 1 \times \overrightarrow{AB}$,
- …

Ceci permet alors de déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AC} = (1,0) \quad ; \quad \overrightarrow{AB} = (0,1) \quad ; \quad \overrightarrow{AF} = (\frac{3}{2}, -1) \quad ; \quad \overrightarrow{AE} = (-1; \frac{1}{2}) \quad ; \quad \overrightarrow{FE} = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}) \quad ; \quad \overrightarrow{BC} = (-1; 1).$$

Ainsi, puisque $\det(\overrightarrow{FE}; \overrightarrow{BC}) = 0$ nous en déduisons que les vecteurs sont colinéaires et donc les droites sont parallèles. Nous pouvons aussi étudier l'alignement des points $F, E$ et $A$ et montrer qu'ils ne sont pas alignés (contrairement à ce que nous avions pu penser en observant la figure).

Tout ceci permet de démontrer sans trop de difficulté le théorème de Thalès en utilisant la notion de colinéairité.

**Théorème 37** (Thalès)**.** *Soient $A, B$ et $C$ trois points deux à deux distincts. Considérons ensuite $E \in (AB)$ et $F \in (AC)$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes.*

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (EF) \parallel (BC)$$

*Démonstration.* Traitons le sens direct en reformulant les hypothèses d'un point de vu vectoriel. L'égalité impliquant les longueurs signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ainsi que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont respectivement colinéaires : il existe $\lambda \neq 0$ tel que

$$\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{AC}$$

Ainsi, grâce à la relation de Chasles : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{BA} + \lambda\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{BC}$. Autrement dit, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Par suite, les droites sont parallèles.

1. Pour faire ceci, il est essentiel que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne soient pas colinéaires.

Réciproquement, supposons que $(EF) \parallel (BC)$. Nous en déduisons alors qu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que

$$\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{BC}.$$

De plus, puisque $E \in (AB)$ et $F \in (AC)$, il existe $\mu, \nu \in \mathbb{R}_*$ tels que

$$\overrightarrow{AE} = \mu \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = \nu \overrightarrow{AC}$$

Par suite, grâce à la relation de Chasles (et le raisonnement de la partie directe) : $\overrightarrow{EF} = \mu \overrightarrow{BA} + \nu \overrightarrow{AC}$. Or, à nouveau via la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{BA} + \lambda \overrightarrow{AC}.$$

D'où,

$$\lambda \overrightarrow{BA} + \lambda \overrightarrow{AC} = \mu \overrightarrow{BA} + \nu \overrightarrow{AC} \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda - \mu)\overrightarrow{BA} = (\nu - \lambda)\overrightarrow{AC}.$$

Les points $A, B$ et $C$ étant distincts deux à deux, cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}$ ne sont pas colinéaires. Nécessairement, $\nu - \lambda = 0$ ou $\lambda - \mu = 0$. Dans le premier cas, cela entraine que

$$\overrightarrow{0} = (\nu - \lambda)\overrightarrow{AC}.$$

Or, $A \neq C$ donc $\nu - \lambda = 0$. En définitive, nous avons montré que

$$\lambda = \mu = \nu.$$

Ce qui signifie que l'égalité entre les ratios des distances est satisfaite. La même conclusion s'obtient si nous supposons d'abord que $\nu - \lambda = 0$. □

*Remarque.* Implicitement, dans la partie réciproque, nous avons utilisé que la décomposition d'un vecteur dans une base (i.e. en fonction de deux vecteurs non colinéaires) est unique.

**Exercices à traiter :** 9 p 123 (11 page 123 à la maison) ; 62 page 127 (indication : partir de l'expression de $\overrightarrow{AE}$ et introduire, grâce à la relation de Chasles, deux fois le point $O$). 63 page 127 (facultatif).

## 13.4 Bilan du chapitre

Voici les compétences à maitriser dans ce chapitre :

- Utilisation des vecteurs en géométrie.
- Etude de la colinéarité (avec le déterminant ou la définition).
- Calculer les coordonnées de $k\overrightarrow{u}$.