Chapitre 6

Racines carrées

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la notion de racine carrée.

6.1 Définition

Définition 6.1.1. *Soient d et c deux nombres* ***positifs****. Nous dirons que c est la racine carrée de d si l'égalité suivante est satisfaite*

$$c^2 = d.$$

Il est usuel de noter c par $\sqrt{d}$.

Exemple 6.1.1.
1. $\sqrt{4} = 2$ puisque $2^2 = 4$. Puisque $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N}$, nous dirons que que 4 est un carré parfait.
2. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ car $(2\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4(\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8$. Pour cet exemple, 8 n'est pas un carré parfait car $2\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

Exercice à traiter : 1 (fiche racines carrées).

6.2 Propriétés de la racine carrée

Voyons quelles sont les propriétés vérifiées par la racine carrée.

Proposition 12. *Si $a, b \in \mathbb{R}_+$ alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.*

Démonstration. Pour démontrer cette égalité, il suffit de vérifier que $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = ab$. Or

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = ab.$$

□

Remarque. 1. Il est important d'observer que cette propriété n'est valable que **pour la multiplication.** En effet, en général,

$$\sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}} \neq \sqrt{\mathbf{a}}+\sqrt{\mathbf{b}}.$$

Ceci peut être démontrer à l'aide d'un contre-exemple. Si $a = 9$ et $b = 16$ nous avons, d'une part

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

et d'autre part

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{9}+\sqrt{16} = 3+4 = 7.$$

Comme nous allons le voir, la proposition 12 est très utile pour **simplifier des racines carrées.**

Exemple 6.2.1. Appliquons la proposition 12 pour simplifier les racines carrées suivantes.

1. $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
2. $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

Remarque. Pour simplifier la racine carrée d'un nombre il suffit donc d'écrire ce nombre sous la forme d'un produit impliquant des carrés parfaits (4 ou 25 ci-dessus).

Exercice à traiter : 2 et 3 (fiche racines carrées).

6.3 Enlever une racine carrée du dénominateur

Il sera également important de savoir **supprimer une racine carrée d'un dénominateur**.

Exemple 6.3.1. Pour faire disparaitre une racine carrée d'un dénominateur, il suffit de multiplier la fraction au numérateur et dénominateur par cette même racine carrée. Voyons plutôt.

1. $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
2. $\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Exercice à traiter : 8 questions 1 et 2 (fiche racines carrées).