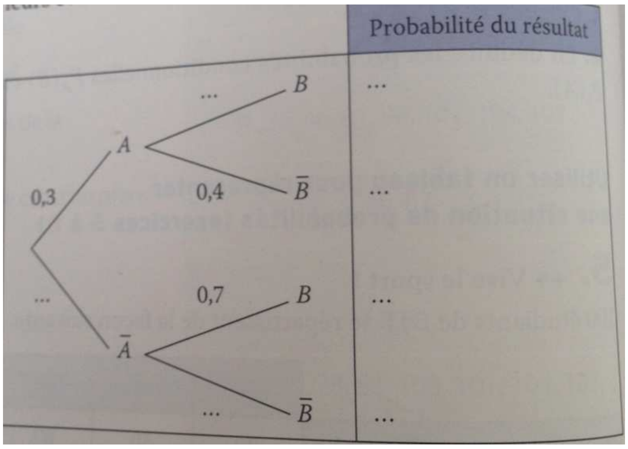
Correction : séance du 16/03

0.1 Arbres pondérés

Exercice 1. Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre ci-dessous. Dans celui-ci, A et B désignent deux évènements ; $\bar{A}$ et $\bar{B}$ représentent leur évènement complémentaire.



1. Pour compléter l'arbre, il suffit de faire en sorte que **la somme des poids vaut** 1. Par exemple, en partant de la gauche, il faut placer le poids $0,7$, puis (de haut en bas) les poids $0,6$ et enfin $0,3$.
2. Il est important de noter que les probabilités calculées correspondent à la probabilité de l'intersection des évènements rencontrés le long d'un chemin. Celles-ci s'obtiennent en **multipliant les poids rencontrés**, de haut en bas cela donne :

$$\mathbb{P}(A\cap B) = 0,3\times 0,6 = 0,18 \quad ; \quad \mathbb{P}(A\cap\bar{B}) = 0,3\times 0,4 = 0,12 \quad ; \quad \mathbb{P}(\bar{A}\cap B) = 0,7\times 0,7 = 0,49$$

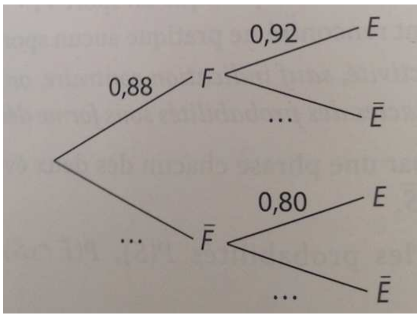
$$; \quad \mathbb{P}(\bar{A}\cap\bar{B}) = 0,7\times 0,3 = 0,21.$$

3. Pour que l'évènement B se réalise, il est possible que A ou $\bar{A}$ se soit réalisé : cela correspond au premier chemin (en partant du haut) et du 3-ième chemin. Par suite :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A\cap\bar{B}) = 0,18 + 0,49 = 0,67.$$

Exercice 2. Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré suivant. Dans celui-ci, E et F désignent deux évènements ; $\bar{E}$ et $\bar{F}$ représentent leur évènement complémentaire.

1. Il faut procéder comme dans l'exercice 1, question 1.



2. Il suffit de lire l'arbre sans se tromper. En partant de la gauche, $0,88$ correspond à $\mathbb{P}(F)$ et $0,92$ correspond à $\mathbb{P}_F(E)$ (i.e. la probabilité que E se réalise sachant que F s'est déjà réalisé). En suivant ce principe, nous trouvons
$$\mathbb{P}(\bar{F}) = 0,12 \quad ; \quad ,\mathbb{P}_{\bar{F}}(E) = 0,80 \quad ; \quad \mathbb{P}_{\bar{F}}(\bar{E}) = 0,20.$$
3. Il faut procéder comme dans l'exercice 1, question 2 : $\mathbb{P}(F \cap E) = 0,88 \times 0,92 = 0,8096$, $\mathbb{P}(\bar{F} \cap E) = 0,096$ et $\mathbb{P}(\bar{F} \cap \bar{E}) = 0,024$.
4. Comme dans l'exercice 1, question 3, nous trouvons $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F \cap E) + \mathbb{P}(\bar{F} \cap E) = 0,88 + 0,096 = 0.9056$.

Exercice 3. 1. Il suffit de dessiner deux branches : l'une menant à l'évènement N avec $\frac{2}{10} = 0,2$ comme poids et l'autre menant à l'évènement B avec $0,8$ comme poids.
2. Le dessin de la question précédente correspondait au 1er tirage, il suffit de reproduire cette arbre deux fois (une fois à partir de l'évènement N, une autre fois à partir de l'évènement B) pour obtenir le 2ième tirage. Enfin, il suffit recommencer une dernière fois le procédé précédent pour obtenir le troisième tirage et l'arbre complet (celui-ci doit contenir 8 branches à la fin).
3. L'évènement « obtenir trois boules noires »s'obtient grâce au tirage NNN qui correspond à la premier branche (en partant du haut. Ainsi, $\mathbb{P}(\text{obtenir trois boules noires}) = 0,2^3 = 0,008$.
4. L'évènement F : « obtenir exactement deux boules noires » s'obtient à partir de trois tirages différents : NNB, NBN, BNN (respectivement, en partant du haut, le 2ième chemin, le 3ième et le 4ième). Ainsi,
$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(NNB)+\mathbb{P}(NBN)+\mathbb{P}(BNN) = 0,2\times0,2\times0,8+0,2\times0,8\times0,2+0,8\times0,2\times0,2 = 0,096.$$

0.2 Epreuves de Bernoulli

Exercice 4. 1. Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité de l'évènement C vaut $\frac{4850}{5000} = 0,97$.
2. Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli puisque l'expérience aléatoire ne présente que 2 issues. La probabilité de succès vaut 0.97
3. Le résultat du loto, le résultat d'un match de football, le résultat d'une élection présidentielle, etc. . . sont des expériences aléatoires présentant strictement plus de 2 issues.